खंड 2

केंन्द्रिय प्रवृत्ति तथा परिवत- ‘नशीलता के माप

खंड प्रस्तावना

दूसरे खंड का शीर्षक है केंन्द्रीय प्रवृत्ति तथा परिवर्तनशीलता के माप। इस खंड में तीन इकाइयाँ, 3, 4 और 5 है। **तीसरी इकाई** केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों पर है और इसमें आँकड़ों के केंद्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा पर चर्चा की जाएगी । केंद्रीय प्रवृत्ति के अलग अलग मापों जैसे माध्य, मध्यिका और बहुलक, उनके गुण, लाभ, सीमाएं और उनकी गणना के विषय मे भी बताया जायेगा । **इकाई 4** का शीर्षक है परिवर्तनशीलता के परिणामों का परिचयात्मक अध्ययन। यह इकाई परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन, मानक विचलन और प्रसरण पर केंद्रित है। इस खंड की **इकाई 5** में हम परिवर्तनशीलता के परिणामों की गणना चरणवार, स्पष्टीकरण और उपयुक्त उदाहरण के साथ चर्चा करेंग।

।

इकाई 3 केंन्द्रीय प्रवृत्ति तथा परिवर्तनशीलता के माप *

संरचना

3.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

* प्रो.सुहास शेटगोवेकर , मनोविज्ञान, संकाय सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू

- आँकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा की व्याख्या कर सकेंगे;
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों का वर्णन कर सकेंगे;
- माध्य, मध्यिका और बहुलक के गुणों, लाभों और सीमाओं पर चर्चा कर सकेंगे; तथा
- असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की सहायता से गणना कर सकेंगे।

3.1 प्रस्तावना

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आपके पास मनोविज्ञान विषय में 12 वीं कक्षा के छात्रों द्वारा प्राप्त अंक है और आप इसे सांख्यिकीय रूप से विश्लेषण करना चाहते हैं, तो आप किस सांख्यिकीय तकनीकों का उपयोग करेंगे? आप निश्चित रूप से वर्गीकरण और सारणीकरण की सहायता से आँकड़ों को व्यवस्थित कर सकते हैं जिसकी हमने पिछली इकाई में चर्चा की थी और आँकड़ों का रेखांकन भी किया जा सकता है। लेकिन यदि आप आँकड़ों का और अधिक विश्लेषण करना चाहते हैं तो आप पूरी कक्षा द्वारा प्राप्त आ. ैसत अंकों की गणना कर सकते हैं या मध्य बिन्दु ढूंढ सकते हैं जिसके ऊपर आधे अंक, और आधे अंक नीचे स्थित है या आप ऐसे अंक भी ढून्ढ सकते हैं जो अधिकतर छात्रोक ने प्राप्त कि, है। इस तरह जो तकनीक आप उपयोग करेंगे वे है माध्य, मध्यिका और बहुलक। इन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कहा जाता है और वर्णनात्मक आँकड़ों के तहत वर्गीकृत किया जाता है।

पिछली इकाई में, हमने वर्गीकरण, सारणीकरण और आँकड़ों के रेखाआकृतिय प्रदर्शन के विषय में चर्चा की थी। वर्तमान इकाई में, हम केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों, अर्थात, माध्य, मध्यिका और बहुलक पर चर्चा करेंगे। हम न केवल इन तकनीकों को समझेंगे, बल्कि उनके गुणों, लाभों और सीमाओं पर भी ध्यान केंद्रित करेंगे। इसके अलावा, हम यह भी सीखेंगे कि असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की सहायता से गणना कैसे करें।

3.2 आँकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप एकल संख्या प्रदान करते हैं जो आँकड़ों की सामान्य परिमाण को इंगित करता है । और यह एकल संख्या, आँकड़ों के केंद्रीय स्थान की पहचान कर उन आँकड़ों की विशेषताओं के बारे में जानकारी प्रदान करता है (बॉर्डेन्स और एबॉट, 2011)। किंग और मिनियम (2013) ने केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को एक संक्षिप्त आँकड़ा के रूप में वर्णित किया जो कि अंकों के एक निश्चित समूह के लिए केन्द्रीय स्थान का वर्णन करने में सहायता करता है। टेट (1955, पृष्ठ 78) ने केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को ''श्रृंखला में वस्तुओं के औसत या विशिष्ट मान के एक प्रकार के रूप में परिभाषित किया है और इसका कार्य इस औसत मान के संदर्भ में श्रृंखला को संक्षेप में प्रस्तुत करना है''।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के मुख्य कार्य निम्नानुसार हैं:

1) वे एक संक्षिप्त आँकड़ा प्रदान करते हैं जिसकी सहायता से पूरे आँकड़ों के केन्द्रीय स्थान को समझाया जा सकता है। जब हम एक निश्चित समूह के औसत की गणना करते हैं तो हमें पूरे आँकड़ों के बारे में एक अनुमान मिलता है।

2) बड़ी मात्रा के आँकड़ों को आसानी से एकल संख्या में घटाया जा सकता है। माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना विशाल आँकड़ों के लिए की जा सकती है और एक एकल संख्या प्राप्त की जा सकती है ।

3) जब किसी प्रतिदर्श के लिए माध्य की गणना की जाती है, तो यह जनसंख्या के माध्य का अनुमान लगाने में सहायता करेगा।

4) केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की गणना से प्राप्त परिणाम कुछ निश्चित निर्णय लेने में सहायता करते हैं । यह न केवल शोध संबंध निर्णयों लेने में उपयुक्त हैं बल्कि अपितु नीति निर्माण, विपणन और विक्रय जैसे विभिन्न क्षेत्रों में भी उपयुक्त हो सकते हैं ।

5) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की सहायता से गणना किए गए एकल संख्या के आधार पर तुलना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, गणित की परीक्षा में छात्रों के प्रदर्शन के संबंध में, लड़कियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों और लड़कों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों की तुलना की जा सकती है।

एक अच्छे केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कि निम्नलिखित विशेषताएं होनी चाहिएः

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति की परिभाषा को पर्याप्त रूप से निर्दिष्ट और स्पष्ट होना चाहिए। यह विभिन्न विवेचनों (व्याख्याओं) के अधीन नहीं होनी चाहिए और इसे किसी भी व्यक्तिगत पूर्वाग्रह से अप्रभावित रहने की आवश्यकता है। परिभाषा दृढ़ होनी चाहिए ताकि एक स्थिर मान प्राप्त हो जो आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करता है।

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को समझना और उनकी गणना करनां आसान होना चाहिए। इसमें विस्तृत गणितीय गणनाओं को सम्मिलित नहीं होने चाहिए।

3) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की गणना से प्राप्त संख्या, आँकड़ों का प्रतिनिधित्व तब करते हैं जब सारे आँकड़ों कि गणना की गई हो ।

4) आँकड़ों को ऐसे प्रतिदर्श से एकत्र किया जाना चाहिए जो वास्तव में जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता हो। इसलिए प्रतिदर्श को यादृच्छिक ढंग से चुना जाना चाहिए।

5) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को प्रतिदर्श स्थिरता प्रदर्शित करने की आवश्यकता है और प्रतिदर्श में किसी भी उतार–चढ़ाव से प्रभावित नहीं होना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि दो अलग–अलग शोधकर्ता एक ही जनसंख्या से एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्राप्त करते हैं, तो उनके संबंधित प्रतिदर्श के लिए उनके द्वारा गणना किए गए माध्यों को कम से कम विचलन प्रदर्शित करना चाहिए।

6) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को बहिवर्तीय (outliers) से प्रभावित नहीं होना चाहि,। आँकड़ों या वितर.ा में चरम संख्याओं को बहिवर्तीय कहा जाता है।

7) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को आगे गणितीय संगणना के लिए प्रस्तुत होना चाहिए।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 1

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को परिभाषित करें।

....

....

....

....

....

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के कार्यों को सूचीबद्ध करें।

……………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3.3 केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप

जैसा कि केन्द्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा अब स्पष्ट है, हम अब केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों पर चर्चा करने के लिए आगे बढ़ेंगे। केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन माप जिन पर हम चर्चा करेंग वे हैः

1) माध्य या समांतर माध्य
2) मध्यिका
3) बहुलक

इकाई के इस भाग में, हम इन अवधारणाओं को समझने की कोशिश करेंगे और फिर अगले भाग में हम इनमें से प्रत्येक माप के गुणों, लाभों और सीमाओं पर ध्यान केंद्रित करेंगे।

3.3.1 माध्य या समांतर माध्य

प्रतिदर्श के माध्य का प्रतीक 'M या $\overline{x}$ ('x-bar')' है और जनसंख्या के माध्य का प्रतीक 'μ' ('mu') है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति के सबसे अधिक प्रयोग किए जाने वाले मापों में से एक है और इसे अक्सर औसत शब्द से भी सम्भोदित किया जाता है। इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के सबसे संवेदनशील माप में से एक के रूप में भी कहा जा सकता है क्योंकि जब इसकी गणना की जाती है तब आँकड़ों में समिल्लित सभी प्राप्तांकों को ध्यान में रखा जाता है (बोर्डैन्स और एबट, 2011)। अनेक सांख्यिकीय तकनीकों की गणना माध्य के आधार पर की जा सकती है, इस प्रकार, यह और भी अधिक उपयोगी बन जाता है।

माध्य में आकड़े में दिए गए सारे प्राप्तांको को जोड़कर जो अंक प्राप्त होता है उसे प्राप्तांको की कुल संख्या से विभाजित किया जाता है ।उदाहरण के लिए, यदि एक कक्षा में 100 छात्र हैं और हम मनोविज्ञान विषय की परीक्षा में उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्य या औसत अंकों को जानना चाहते हैं, तो हम उनके सभी अंकों को जोड़ेंगे और 100 से विभाजित करेंगे, (अर्थात् छात्रों की कुल संख्या से)।

3.3.2 मध्यिका

मध्यिका एक आँकड़ें में ऐसा बिंदु हैं जिसके ऊपर आधे अंक और आधे अंक नीचे स्थित हैं। मध्यिका को P50 के रूप में भी जाना जाता है (किंग और मिनियम, 2008)। मध्यिका का प्रतीक 'M_d' है। जैसा कि बोर्डैन्स और एबट (2011, पृष्ठ 411) द्वारा कहा गया है,'मध्यिका एक क्रमित वितरण में मध्य प्राप्तांक है'। यदि हम मनोविज्ञान विषय की परीक्षा में 100 छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों का उदाहरण लेते हैं, इन अंकों को क्रमित (आरोही या अवरोही रूप में) कर इनका मध्य अंक (जिसके ऊपर आधे और नीचे आधे अंक स्थित है) प्राप्त किया जा सकता है, जिसे मध्यिका के रूप में पहचाना जा सकता है। विषम अंकों

के लिए मध्यिका की गणना करना सरल होता है लेकिन यदि अंक सम है तो एक विशेश प्रक्रिया का उपयोग किया जाता है, जिसके बारे में हम बाद में चर्चा करेंगे ।

3.3.3 बहुलक

बहुलक का प्रतीक 'M_o' है। बहुलक एक वितरण में वह प्राप्तांक है जो सबसे अधिक बार पाया जाता है। मनोविज्ञान की परीक्षा में 100 छात्रों का उदाहरण लेते हुए, यदि इन 100 छात्रों में से 10 छात्रों ने 35 अंक प्राप्त किए है तो 35 सबसे अधिक बार आने वाली संख्या है और इसे बहुलक कहा जा सकता है । कुछ वितरणों द्विबहुलक भी हो सकते हैं। उदाहरण के लिए यदि 100 छात्रों के इस समूह में अन्य दस छात्र थे, जिन्होंने 47 अंक प्राप्त किए तो 47 वह संख्या है जो 35 के समान सबसे अधिक बार आने वाली संख्या है । इस प्रकार, 35 के साथ–साथ 47 भी बहुलक के रूप में माना जाएगा। इसी तरह जब एक वितरण मे तीन बहुलक होते है तो प्रयोग किया जाने वाला शब्द त्रिबहुलक है और जब चार या अधिक बहुलक होते हैं, तो हम बहुल–बहुलक शब्द का प्रयोग करते हैं।

यदि किसी वितरण में प्राप्तांक बहुत भिन्न है तो यह भी संभव है कि कोई बहुलक न हो। इस प्रकार बहुलक वितरण का पर्याप्त लक्षण प्रदान नहीं करता है क्योंकि यह मात्र सबसे ज्यादा बार आने वाले प्राप्तांक को महत्व देता है और अन्य प्राप्तांको पर विचार नहीं करता है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप कैसे चुनें?

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप का चयन सर्वप्रथम माप के पैमानों पर निर्भर करेगा, जिसकी हमने पहली इकाई में चर्चा की थी। नामित पैमाना के लीए बहुलक की गणना कर सकते हैं लेकिन माध्य या मध्यिका की नहीं। उदाहरण के लिए, पुरुषों और महिलाओं के मामले में, पुरुषों को 1 के रूप में और महिलाओं को 2 के रूप में कूटबद्ध (कोड) किया जा सकता है। ऐसे मामले में, हम अधिक बार आने वाले प्राप्तांक की गणना कर सकते हैं, जो हमें जानकारी प्रदान करेगा कि कौन अधिक है पुरुष या महिला। लेकिन, माध्य या मध्यिका की गणना करना संभव नहीं है। क्रमिक मापनी के संबंध में मध्यिका या बहुलक का उपयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि हम गणित की परीक्षा में अपने प्रदर्शन के आधार पर छात्रों को क्रमित करते हैं, तो प्राप्तांक के

मध्यिका गणना संभव है जिसके ऊपर आधे अंक और आधे अंक नीचे स्थित हैं। यदि एक से अधिक छात्र समान क्रम प्राप्त करते हैं तो बहुलक की गणना भी की जा सकती है। अंतराल मापनी और अनुपात मापनी के संबंध में माध्य की गणना की जा सकती है।

एक और पहलू जो केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप के चयन के समय महत्वपूर्ण है, वह है की क्या आँकड़ा प्रसामान्य रूप से वितरित है या नहीं। यदि आँकड़ा प्रसामान्य रूप से वितरित है तो हम माध्य की गणना करेंगे और यदि यह प्रसामान्य रूप से वितरित नहीं है, तो हम मध्यिका या बहुलक की गणना करेंगे। इसका कारण यह है की जब आँकड़ा प्रसामान्य रूप से वितरित नहीं होतो तो माध्य पर्याप्त रूप से आँकड़े का प्रतिनिधित्व नहीं करता है। हम इस पाठयक्रम की अंतिम इकाई (इकाई 8) में प्रसामान्य संभाव्यता वितरण के विषय में विस्तार से चर्चा करेंगे।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 2

1) माध्य, मध्यिका और बहुलक का वर्णन करें।

मापनी	वर्णन	उदाहरण
माध्य		
मध्यांक		
बहुलक		

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कैसे चुनें जा सकते है?

....

....

....

....

....

3.4 माध्य, मध्यिका और बहुलक के गुण, लाभ और सीमाएँ

आइए अब हम माध्य, मध्यिका और बहुलक के गुण, लाभ और सीमाओं पर चर्चा करते हैं।

3.4.1 माध्य के गुण

1) माध्य वितरण में प्रत्येक प्राप्तांक की वास्तविक स्थिति के प्रति संवेदनशील है और यदि वितरण में एक और प्राप्तांक जोड़ा जाता है, तो उस वितरण का माध्य या औसत बदल जाएगा। उदाहरण के लिए, 5, 4, 6, 3, 2 का माध्य 4 है [यदि हम 5+4+6+3+2=20 को जोड़कर इसे 5 (जो प्राप्तांक की कुल संख्या या N है) से विभाजित करते हैं, तो प्राप्त संख्या 4 होगी, लेकिन यदि हम प्राप्तांक को 5, 4, 6, 3, 2, 8 में बदल देते हैं, तो इसका माध्य 4.67 होगा [हमें 5+4+6+3+2+8=28 को जोड़कर इसे 6 (जो प्राप्तांक की कुल संख्या या N है) से विभाजित करके 4.67 प्राप्त होगा ।

2) माध्य किसी भी वितरण के संतुलित बिंदु को दर्शाता है और माध्य से सकारात्मक विचलन का योग माध्य से नकारात्मक विचलन के योग के बराबर होगा (किंग और मिनियम, 2008)।

3) माध्य विशेष रूप से तब प्रभावी होता है जब प्राप्तांक के योग को दर्शाने के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन करते हैं ।

3.4.2 माध्य के लाभ

1) माध्य की परिभाषा दृढ़ है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे माप का गुण है।

2) इसे समझना न केवल आसान है बल्कि इसकी गणना करना भी आसान है।

3) जब माध्य की गणना की जाती है तो वितरण के सभी प्राप्तांकों को सम्मिलित किया जाता है।

4) माध्य के आधार पर आगे की गणितीय गणना की जा सकती है।

5) प्रतिचयन के उतार–चढ़ाव से माध्य के प्रभावित होने की संभावना कम है।

3.4.3 माध्य की सीमाएँ

1) आउटलायर्स या सीमान्त मान का माध्य पर प्रभाव पड़ सकता है।

2) जब उन्मुक्त निरपेक्ष वर्ग होते हैं, जैसे 10 और उससे ऊपर या 5 से नीचे, तो माध्य की गणना नहीं की जा सकती है। ऐसे मामलों में मध्यिका और बहुलक की गणना की जा सकती है। क्योंकि ऐसे वितरण में गणना करने के लिए मध्य बिंदु को निध ार्रित नहीं किया जा सकता है।

3) यदि आँकड़े में एक प्राप्तांक गायब है या खो गया है या स्पष्ट नहीं है, तो माध्य की गणना नहीं की जा सकती है । इस संधर्भ में माध्य की गणना उस खोए हुए प्राप्तं को छोड़कर की जा सकती है ।

4) निरीक्षण के माध्यम से माध्य निर्धारित करना संभव नहीं है। इसके अलावा, यह एक ग्राफ के आधार पर निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

5) यह आँकड़े के लिए उपयुक्त नहीं है जो बहुत ही विषम है क्योंकि तब ऐसे मामलों में माध्य पर्याप्त रूप से आँकड़े का प्रतिनिधित्व नहीं करेगा।

3.4.4 मध्यिका के गुण

1) माध्य की तुलना में, मध्यिका आउटलायर्स या सीमान्त संख्या के प्रति कम संवेदनशील होता है।

2) जब कोइ वितरण विकृत या विषम हो तो मध्यिका का पर्याप्त रूप से प्रयोग किया जा सकता है।

3) जब वितरण मुक्तांत होता है, अर्थात वितरण के एक छोर पर वास्तविक प्राप्तांक ज्ञात नहीं होता है, तो मध्यिका की गणना की जा सकती है।

3.4.5 मध्यिका के लाभ

1) मध्यिका की परिभाषा दृढ़ है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे माप की गुण है।

2) इसे समझना और इसकी गणना करना आसान है।

3) यह आँकड़ा आउटलायर्स या सीमान्त संख्या से प्रभावित नहीं होता है।

4) जब तक की मध्यिका एक उन्मुक्त निरपेक्ष वर्ग में नहीं आता, तब तक इसकी उन्मु. क्त निरपेक्ष वर्ग के साथ समूहीकृत आँकड़े के लिए गणना कि जा सकती है।

5) कुछ मामलों में निरीक्षण के माध्यम से और साथ ही रेखांकन के माध्यम से मध्यिका की पहचान करना संभव है।

3.4.6 मध्यिका की सीमाएँ

1) कुछ सांख्यिकीय प्रक्रियाएं जो मध्यिका का प्रयोग करते हैं, वे काफी जटिल हैं। मध्यिका की गणना अधिक समय लेने वाली हो सकती है जब बड़े आँकड़े सम्मिलित होते हैं क्योंकि मध्यिका की गणना के पूर्व आँकड़ों को क्रम में व्यवस्थित करने की आवश्यकता होती है।

2) जब असमूहीकृत आँकड़ा सम होता है, तब मध्यिका की गणना ठीक से नहीं की जा सकती है। ऐसे मामलों में, वितरण के मध्य प्राप्तांक के माध्य को मध्यिका के रूप में अनुमानित किया जाता है।

3) यह वितरण में दिए गए प्रत्येक प्राप्तांक पर आधारित नहीं है।

4) यह प्रतिचयन के उतार–चढ़ाव से प्रभावित हो सकता है और इस तरह इसे माध्य की तुलना मे कम स्थिर कहा जा सकती है।

3.4.7 बहुलक के गुण

1) बहुलक का प्रयोग उन चर के साथ किया जा सकता है जिन्हें नामित मापनी में मापा जा सकता है।

2) बहुलक की, मध्यिका और माध्य की तुलना में, गणना करना आसान है। लेकिन इसका प्रयोग अक्सर एक प्रतिदर्श से दूसरे में स्थिरता की कमी के कारण नहीं किया जाता है और इसलिए भी कि आँकड़े के एक समूह में संभवतः एक से अधिक बहुलक

हो सकते हैं। इसके अलावा, जब एक से अधिक बहुलक हैं, तो केन्द्रीय स्थान को पर्याप्त रूप से मापने के लिए बहुलक का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

3) बहुलक आउटलायर्स या सीमान्त प्राप्तांक से प्रभावित नहीं होता है।

3.4.8 बहुलक के लाभ

1) इसे न केवल समझना और गणना करना आसान है, बल्कि इसे केवल निरीक्षण द्वारा भी निर्धारित किया जा सकता है।

2) इसका प्रयोग मात्रात्मक के साथ–साथ गुणात्मक आँकड़े के लिए किया जा सकता है।

3) यह आउटलायर्स या सीमान्त प्राप्तांक से प्रभावित नहीं होता है।

4) यदि वितरण में एक या एक से अधिक उन्मुक्त निरपेक्ष वर्ग हैं, तो बहुलक की आ. सानी से गणना की जा सकती है।

3.4.9 बहुलक की सीमाएं

1) कभी–कभी यह संभव है की आँकड़े के प्राप्तांक एक दूसरे से भिन्न हैं। ऐसे मामलों में आँकड़े का कोई बहुलक नहीं हो सकता है।

2) बहुलक को दृढ़ता से परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

3) द्विबहुलक, त्रिबहुलक या बहुल़–बहुलक वितरण के मामले में, व्याख्या और तुलना कठिन हो जाती है।

4) बहुलक पूरे वितरण पर आधारित नहीं हातो है।

5) बहुलक के आधार पर आगे की गणितीय प्रक्रियाओं की गणना करना संभव नहीं है।

6) प्रतिदर्श के उतार–चढ़ाव से बहुलक पर प्रभाव पड़ सकता है।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 3

1) माध्य के गुणों को सूचीबद्ध करें।

....

....

....

....

....

2) मध्यिका के लाभ को सूचीबद्ध करें ।

....

....

....

....

....

3) बहुलक की सीमाओं को सूचीबद्ध करें।

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………...……

3.5 असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की सहायता से गणना

हमने केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों मापों के बारे में एक उचित विचार विकसित किया है, तो अब हम सीखेंगे कि उनकी गणना कैसे करें। इनमें से प्रत्येक मापों की गणना करते हुए, हम ऐसा असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़े के लिए करेंगे। असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़े को निम्नानुसार समझाया गया है:

असमूहीकृत आँकड़ा : कोई भी आँकड़ा जिसे किसी भी तरह से वर्गीकृत नहीं किया गया है, उसे असमूहीकृत आँकड़ा कहा जाता है। उदाहरण के लिए, हमारे पास एक व्यक्ति है जो 25 वर्ष का है, दूसरा 30 वर्ष का है, और एक व्यक्ति जो 50 वर्ष का है। ये स्वतंत्र अंक हैं और किसी भी तरह से व्यवस्थित नहीं हैं, इन्हे असमूहीकृत आँकड़े कहा जा सकता हैं।

समूहीकृत आँकड़ा : कोई भी आँकड़ा जिसे वर्गीकृत या व्यवस्थित किया गया है, उसे समूहीकृत आँकड़ा कहा जाता है। मुख्य रूप से ऐसा आँकड़ा आवृत्ति वितरण में व्यवस्थित किए जाते है। उदाहरण के लिए, आयु सीमा 26–30 वर्ष, 31–35 वर्ष, 36–40 वर्ष इत्यादि। मुख्यतः जब आँकड़ा बड़ा हो, तब समूहीकृत आँकड़ा सुविधाजनक होता है ।

3.5.1 असमूहीकृत आँकड़े के लिए माध्य की गणना

असमूहीकृत आँकड़े के माध्य की गणना के लिए सूत्र है:

$M = \Sigma X / N$

जहाँ पर,

M = माध्य

ΣX = वितरण में प्राप्तांकों का योग

N = प्राप्तांकों की कुल संख्या।

अब एक उदाहरण की सहायता से माध्य की गणना करते हैं

मनोविज्ञान विषय की परीक्षा में 10 छात्रों द्वारा प्राप्त किए गए प्राप्तांक इस प्रकार हैं:

58 34 32 47 47 67 35 34 30 39

चरण 1: उपरोक्त आँकड़ों के लिए माध्य की गणना हेतु हम पहले ΣX प्राप्त करने के लिए प्राप्तांकों को जोड़ेंगे:

58+34+32+47+74+67+35+34+30+39 = 450

चरण 2: अब सूत्र का उपयोग करते हुए, हम $M = \Sigma X / N$ की गणना करेंगे

$\Sigma X = 450$, $N = 10$ (छात्रों की कुल संख्या)

इस प्रकार,

$M = 450 / 10 = 45$

इस प्रकार उपरोक्त आँकड़ों के लिए प्राप्त माध्य 45 है।

3.5.2 समूहीकृत आँकड़े के लिए माध्य की गणना

समूहीकृत आँकड़े के लिए माध्य का सूत्र है:

$M = \Sigma fX / N$

जहां,

M = माध्य

$\sum$ = योग

X = वितरण का मध्य बिंदु

f = संबंधित आवृत्ति

N = प्राप्तांकों की कुल संख्या

अब एक उदाहरण की सहायता से गणना करते हैं।

30 छात्रों की एक कक्षा को मनोविज्ञान परीक्षण दिया गया और उनके द्वारा प्राप्तांकों को छह श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया। सबसे कम अंक 10 प्राप्त किए गए और उच्चतम अंक 35 प्राप्त किए गए थे। 5 का वर्ग अंतराल नियोजित किया गया। आँकड़ों को निम्नानुसार दिया गया है:

अंक	आवृत्ति (*f*)	मध्य विंदु (X)	*f*X
35- 39	5	37	185
30-34	7	32	224
25-29	5	27	135
20-24	6	22	132
15-19	4	17	68
10- 14	3	12	36
	N= 30		**ΣfX = 780**

समूहीकृत आँकड़ों के साथ माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित चरण इस प्रकार हैं:

चरण 1: आँकड़े में दिए गए अंकों को 5 का वर्ग अंतराल लेकर एक तालिका में श्रेणीबद्ध किया गया है ।

चरण 2: श्रेणियां बनने के बाद, अंकों को आवृत्ति स्तम्भ में वे किस श्रेणी में पड़ते है उस आधार पर प्रविष्ठ किया जाता है ।

चरण 3: श्रेणियों के मध्य बिंदुओं की गणना की जाती है और X के अंतर्गत उन्हें प्रविष्ठ किया जाता है।

चरण 4: प्रत्येक श्रेणी के लिए आवृत्तियों और मध्य बिंदुओं को गुणा करके fX प्राप्त किया जाता है।

चरण 5: ΣfX को प्राप्त करने के लिए सभी श्रेणियों के fX को जोड़ा जाता है, हमारे उदाहरण के मामले में ΣfX 780 प्राप्त किया गया है।

चरण 6: सूत्र $M = \Sigma fX/N$ का प्रयोग किया जाता है। N = 30 के बराबर है।

$M = \Sigma fX/N$

$M = 780/30 = 26$

इस प्रकार प्राप्त माध्य 26 है।

3.5.3 लघु विधि द्वारा माध्य की गणना (अभिगृहीत माध्य के साथ)

कुछ मामलों में आँकड़ें बहुत बड़े होते है और प्रत्येक fX की गणना करना संभव नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, अभिगृहीत माध्य की सहायता से लघु विधि से माध्य की गणना की जा सकती है। इस प्रकार वास्तविक माध्य की गणना शोधन के प्रयोग (application of correction) से की जा सकती है।

सूत्र है:

$$\mathbf{M = AM + (\Sigma fx'/N \times i)}$$

जहाँ पर,

AM = अभिगृहीत माध्य

Σ= योग

i = वर्ग अंतराल

$x' = \{(X - AM)/i\}$, X अंतराल में प्राप्तांक का मध्य बिंदु है

f = मध्य विंदु की संबंधित आवृत्ति

N = आवृत्तियों या छात्रों की कुल संख्या।

आइए नीचे दिए गए उदाहरण की सहायता से माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित चरणों की चर्चा करें ।

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्ति (*f*)	मध्य विंदु (X)	$x' = \{(X - AM)/ i\}$	fx'
35- 39	5	37	3	15
30-34	7	32	2	14
25-29	5	27	1	5
20-24	6	22	0	0
15-19	4	17	-1	-4
10- 14	3	12	-2	-6
	N= 30			**$\Sigma fx' = 24$**

चरण 1: हम 22 को अभिगृहीत माध्य (AM) मानेंगे।

चरण 2: प्रत्येक मध्य विंदु और अभिगृहीत माध्य के बीच अंतर प्राप्त किया जाता है और फिर उसे i से विभाजित किया जाता है जो कि वर्ग अंतराल है (इस मामले मे 5), फिर इन्हें
$x' = \{(X - AM)/ i\}$ स्तम्भ के अंतर्गत प्रविष्ठ किया जाता है। संख्या 22 के लिए x' होगा 0।

चरण 3: आवृत्ति (f) को x' के साथ गुणा किया जाता है ताकि fx' प्राप्त किया जा सके।

चरण 4: $\Sigma fx'$ प्राप्त करने के लिए सभी fx' को जोड़ा जाता है, वर्तमान उदाहरण में यह 24 है।

चरण 5: अब सूत्र का प्रयोग कर माध्य का मान प्राप्त कर सकेंगे

$M = AM + (\Sigma fx'/N \times i)$

$M = 22 + (24/30 \times 5)$

$= 22 + 4 = 26$

इस प्रकार, प्राप्त माध्य 26 है।

और यदि आप प्रत्यक्ष विधि द्वारा प्राप्त माध्य और लघु विधि द्वारा प्राप्त माध्य को देखें तो माध्य समान है, जो कि 26 है।

3.5.4 असमूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका की गणना

असमूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका की गणना के संबंध में, विषम और सम आँकड़ों के लिए विभिन्न प्रक्रियाओं का पालन किया जाता है।

3.5.4.1 विषम आँकड़ा : आँकड़ा विषम होने पर मध्यिका की गणना निम्न तरीके से की जाती है:

आँकड़ा : 58 34 32 47 74 67 67 35 34 30 (N= 9)

चरण 1: पहले आँकड़े को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। हमने आरोही क्रम में आँकड़े को व्यवस्थित किया है और यह इस तरह दिखेगा:

30 32 34 34 35 47 58 67 74

चरण 2: प्रयोग किया जाने वाला सूत्र निम्नलिखित है:

$M_d = (N+1) / 2^{th}$ प्राप्तांक

इस प्रकार (9+1)/2 = 10/2 = 5 वाँ एकांश

हमारे आँकड़े में 5 एकांश 35 है, जो इस आँकड़े की मध्यिका है।

3.5.4.2 सम आँकड़ा : यदि आँकड़ा सम हो, तो मध्यिका की गणना निम्नलिखित तरीके से की जाती है:

58 34 32 47 74 67 35 34 30 30 39 (N =10)

चरण 1: पहले आँकड़े को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। हमने आरोही क्रम में आँकड़े को व्यवस्थित किया है, और यह इस तरह दिखेगा:

30 32 34 34 35 39 47 58 67 74

चरण 2: निम्न सूत्र का उपयोग माध्य की गणना करने के लिए किया जाता है:

M_d = (N/2) वां प्राप्तांक. [(N/2) वां प्राप्तांक़ 1]/ 2

(N/2) वां प्राप्तांक, 5 वां एकांश है, जो कि 35 है।

(N/2) वां प्राप्तांक +1, 6 वां एकांश है, जो 39 है।

इस प्रकार 35+39/2 = 37 है।

इस प्रकार प्राप्त माध्य 37 है।

3.5.5 समूहीकृत आँकड़े के लिए मध्यिका की गणना

समूहीकृत आँकड़े के मध्यिका की गणना के लिए प्रयोग किया जाने वाला सूत्र इस प्रकार है:

$M_d = L + [(N/2) - F/f_m] \times i$

जहाँ पर,

L = मध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

N = सभी आवृत्तियों का योग

F = मध्यिका वर्ग से पूर्व आवृत्तियों का योग

f_m = मध्यिका वर्ग की आवृत्ति

i = वर्ग अंतराल

आइए नीचे दिए गए उदाहरण की सहायता से मध्यिका की गणना के लिए चरणों की चर्चा करें।

वर्ग अंतराल (अंक)	**आवृत्ति (*f*)**
35- 39	5
30-34	7
25-29	**5**
20-24	6
15-19	4
10- 14	3
	N= 30

समूहीकृत आँकड़े के मध्यिका की गणना करने के चरण इस प्रकार हैं:

चरण 1: पहला चरण N/2 की गणना करना है, जो कि 30 ⁄ 2 है ताकि हम आँकड़े के आधे प्राप्तांक प्राप्त करें, जो 15 है।

चरण 2: जैसा कि प्राप्तांक सम (N = 30) हैं, मध्यिका को 15 वें और 16 वें प्राप्तांक के बीच होना चाहिए। चाहें हम ऊपर से आवृत्तियों को जोड़ते हैं (5+7+5 = 17) या नीचे से (3+4+6+5 = 18), मध्यिका वर्ग अंतराल 25–29 में पड़ेगा। इसके अलावा L जो मध्यिका वर्ग की निम्न सीमा है, इसका भी उल्लेख किया जा सकता है। जैसा कि मध्यिका वर्ग 25–29 है, इसकी निम्न सीमा 24.5 होगी।

चरण 3: F की गणना, जो की मध्यिका वर्ग से पूर्व आवृत्तियों का योग है। हमारे उदाहरण में यह 3+4+6=13 होगा ।

चरण 4: f_m की गणना। यह मध्यिका वर्ग की आवृत्ति है। वर्तमान उदाहरण में मध्यिका वर्ग अंतराल 25–29 है और इस वर्ग अंतराल की आवृत्ति 5 है। इसलिए f_m 5 है।

चरण 5: मध्यिका प्राप्त करने के लिए अब निम्न सूत्र का उपयोग किया जा सकता हैं:

$$\mathbf{M_d=L+[(N/2)-F/f_m] \times i}$$

$= 24.5 +[(30/2)- 13/ 5] \times 5$

$= 24.5 + [15- 13/5] \times 5$

$= 24.5 + [2/ 5] \times 5$

$= 24.5 + 10/ 5$

$= 24.5 +2$

$= 26. 5$

इस प्रकार, प्राप्त मध्यिका 26.5 है और यह मध्यिका अंतराल 25–29 में आता है।

3.5.6 असमूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक की गणना

आइए निम्न उदाहरण की सहायता से सीखते हैं कि असमूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक की गणना कैसे करें:

58 34 32 47 74 67 35 34 30 39

बहुलक की गणना सरल तरीके से की जा सकती है, केवल आँकड़ों में अत्यधिक बार दिखाई देने वाले प्राप्तांकों की गणना करके। हमारे उदाहरण में, अत्यधिक बार आने वाला प्राप्तांक 34 है, जो दो बार आया है। इस प्रकार बहुलक 34 है।

3.5.7 समूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक की गणना

दो विधियाँ हैं जिनके आधार पर समूहीकृत आँकड़े की गणना की जा सकती है:

3.5.7.1 प्रथम विधि

पहली विधि में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

बहुलक = **3Mdn−2M**

जहाँ पर ,

Mdn = मध्यिका

M = माध्य

आइए अब निम्न उदाहरण की सहायता से बहुलक की गणना करें:

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्ति (*f*)	मध्यविंदु (X)	*f*X
50- 59	5	54.5	272.5
40- 49	7	44.5	311.5
30- 39	8	34.5	276
20- 29	10	24.5	245
10- 19	15	14.5	217.5
0- 9	5	4.5	22.5
	N= 50		**ΣfX = 1345**

सूत्र $M = \Sigma fX/N$ का प्रयोग किया जाता है, N 50 के बराबर है।

चरण 1: माध्य की गणना करें

$$M = \Sigma fX/N$$

$M = 1370/50 = 26.9$

चरण 2: मध्यिका की गणना करें

$M_d = L + [(N/2) - F/f_m] \times i$

$= 19.5 + [(50/2) - 20/10] \times 10$

$= 19.5 + [25 - 20/10] \times 10$

$= 19.5 + [5/10] \times 10$

$= 19.5 + 5$

$= 24.5$

चरण 3: आइए अब बहुलक की गणना करें।

$M_o = 3Mdn - 2M$

$M_o = 3 \times 24.5 - 2 \times 26.9$

$= 73.5 - 53.8$

$= 19.7$

इस प्रकार गणना किया गया बहुलक 19.7 है ।

हम यहां एक अवलोकन कर सकते हैं की हमारे उदाहरण मे प्राप्त माध्य 26.9 है, मध्यिका 24.5 है और बहुलक 19.7 है। तीनों एक–दूसरे के करीब नहीं हैं, यह दर्शाता है कि आँकड़ो का वितरण प्रसामान्य नहीं है क्योंकि इनके प्राप्त मान वितरण के केन्द्रीय क्षेत्र में नहीं आते हैं। यदि माध्य, मध्यिका और बहुलक समान होते, तो हम कह सकते थे कि आँकड़ों का वितरण प्रसामान्य है।

3.5.7.2 दूसरी विधि

समूहीकृत आँकड़े के लिए बहुलक की गणना की दूसरी विधि में निम्न सूत्र के प्रयोग से किया जाता है:

$M_o = L + [d_1 / d_1 + d_2] \times i$

जहाँ पर ,

L = वर्ग अंतराल की निम्न सीमा जिसमें बहुलक स्थित हो सकता है, जिसे बहुलकी वर्ग कहा जाता है

i = वर्ग अंतराल

d_1 = बहुलकी वर्ग की आवृत्ति और बहुलकी वर्ग के नीच के वर्ग अंतराल की आवृत्ति के बीच अंतर

d_2 = बहुलकी वर्ग की आवृत्ति और बहुलकी वर्ग के ऊपर के वर्ग अंतराल की आवृत्ति के बीच अंतर

आइए नीचे दिए गए उदाहरण की सहायता से बहुलक की गणना के लिए निम्नलिखित चरणों पर चर्चा करें।

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्ति (*f*)
35- 39	5
30-34	**7**
25-29	5
20-24	6
15-19	4
10- 14	3
	N= 30

चरण 1: बहुलक, वर्ग अंतराल 30–34 में आ़ने की संभावना है क्योंकि इसमें सबसे अधिक आवृत्तियां (7) हैं। इस प्रकार यह हमारा बहुलकी वर्ग है और उस की निम्न सीमा (L) 29. 5 होगी।

चरण 2: इस उदाहरण के लिए वर्ग अंतराल (i) 5 है।

चरण 3: d_1 की गणना, अर्थात, बहुलकी वर्ग की आवृत्ति और बहुलकी वर्ग के नीच के वर्ग अंतराल की आवृत्ति के बीच अंतर और d_2 की गणना, अर्थात, बहुलकी वर्ग की आवृत्ति और बहुलकी वर्ग के ऊपर के वर्ग अंतराल की आवृत्ति के बीच अंतर।

$d_1 = f_m - f_{m-1}$

$d_2 = f_m - f_{m+1}$

जहाँ ,

f_m = बहुलकी वर्ग की आवृत्ति (हमारे उदाहरण के संबंध में 7)।

f_{m-1} = बहुलकी वर्ग के नीचे के वर्ग अंतराल की आवृत्ति (हमारे उदाहरण के संबंध में 5)।

f_{m+1} = बहुलकी वर्ग के ऊपर के वर्ग अंतराल की आवृत्ति (हमारे उदाहरण के संबंध में 5)।

इस प्रकार, हमारे उदाहरण के मामले में d_1 = 7–5 = 2 और d_2 = 7–5 = 2 है।

चरण 4: अब हम सूत्र की सहायता से बहुलक की गणना करते हैं।

$$M_o = L + [d_1 / d_1 + d_2] \times i$$

$$M_o = 29.5 + [2/2+2] \times 5$$

$$= 29.5 + 2/4 \times 5$$

= 29.5 +10 /4

= 29.5 + 2.5

= 32

इस प्रकार प्राप्त बहुलक 32 है।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 4

1) निम्न आँकड़े के लिए माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना करें:

23, 34, 43, 65, 67, 67, 67, 78, 65, 43, 34, 45, 33, 23, 67, 60 (N = 15)

2) निम्नलिखित आँकड़े से माध्य की गणना करें ।

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्तियाँ (*f*)
50- 59	4
40- 49	5
30- 39	6
20- 29	5
10- 19	5
1- 9	5
	N= 30

3.6 सारांश

वर्तमान इकाई में, हमने केन्द्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा पर चर्चा की है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को संक्षिप्त आँकड़ों के रूप में समझाया गया था जो कुछ निश्चित अंकों के समूह के लिए केन्द्रीय स्थान की व्याख्या करने में सहायता करते हैं। यह आँकड़े के केन्द्रीय स्थान पर या उसके पास की मान की पहचान करके आँकड़ों की विशेषताओं के विषय में जानकारी प्रदान करते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के अच्छे मापों की विशेषताओं के अलावा प्रवृत्ति के मापों के प्रकार्यों पर भी चर्चा की गई। इसके अलावा, इकाई ने केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों पर ध्यान केंद्रित किया, अर्थात, माध्य, मध्यिका और बहुलक । कुल प्राप्तांकों के योग को जब कुल प्राप्तांक संख्या से विभाजित किया जाता है तो माध्य प्राप्त होता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे अधिक उपयोग किया जाने वाला माप है और इसे अक्सर औसत शब्द से भी सम्भोदित किया जाता है। इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के सबसे संवे. दनशील माप में से एक के रूप में भी कहा जा सकता है क्योंकि जब इसकी गणना की जाती है तब आँकड़ों में समिल्लित सभी प्राप्तांकों को ध्यान में रखा जाता है। मध्यिका एक व्यवस्थित किए गए वितरण का मध्य प्राप्तांक है। मध्यिका एक आँकड़ें में ऐसा बिंदु हैं जिसके ऊपर आधे अंक और आधे अंक नीचे स्थित होते हैं। बहुलक किसी वितरण में वह प्राप्तांक है जो सबसे अधिक बार आता है। कुछ वितरण द्विबहुलक होते हैं, जहां दो बहुलक होते हैं। जब तीन बहुलक होते हैं, तो प्रयुक्त शब्द त्रिबहुलक है। और जब चार या अधिक बहुलक होते हैं, तो हम बहुल बहुलक शब्द का उपयोग करते हैं। हालांकि, यदि वितरण में प्राप्तांक बहुत भिन्न है, तो यह संभव है कि कोई बहुलक न हो। माध्य, मध्यिका और बहुलक के गुणों, लाभों और सीमाओं पर भी विस्तार से चर्चा की गई है। इसके अलावा, केन्द्रीय प्रवृत्ति के इन मापों में से प्रत्येक की, असमूहीकृत और समूहीकृत आँकड़ों के साथ, गणना की चर्चा, चरणबद्ध स्पष्टीकरण के साथ की गई है।

3.7 संदर्भ

Bordens, K. S. and Abbott, B. B. (2011). *Research Design and Methods: A Process Approach*. New Dekhi:McGraw Hill Education(India) Private Limited.

King, Bruce. M; Minium, Edward. W. (2008). *Statistical Reasoning in the Behavioural Sciences*. Delhi: John Wiley and Sons, Ltd.

Mangal, S. K. (2002). *Statistics in Psychology and Education*. new Delhi: Phi Learning Private Limited.

Minium, E. W., King, B. M., & Bear, G. (2001). *Statistical Reasoning in Psychology and Education*. Singapore: John-Wiley.

Mohanty, B and Misra, S. (2016). *Statistics for Behavioural and Social Sciences*. Delhi: Sage.

Tate, M. W.(1955). *Statistics in Education*. New York: Macmillion Co.

Veeraraghavan, V and Shetgovekar, S. (2016). *Textbook of Parametric and Nonparametric Statistics*. Delhi: Sage.

3.8 शब्दावली

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप : केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप एकल संख्या प्रदान करते हैं जो आँकड़ों की सामान्य परिमाण को इंगित करता है और यह एकल संख्या, आँकड़ों के केंद्रीय स्थान की पह. चान कर उन आँकड़ों की विशेषताओं के बारे में जानक. ारी प्रदान करता है ।

माध्य : कुल प्राप्तांकों के योग को जब कुल प्राप्तांक संख्या से विभाजित किया जाता है तो माध्य प्राप्त होता है।

मध्यांक : मध्यिका एक आँकड़ें में ऐसा बिंदु हैं जिसके ऊपर आधे अंक और आधे अंक नीचे स्थित होते हैं।

बहुलक : बहुलक एक वितरण में वह प्राप्तांक है जो सबसे अधिक बार पाया जाता है।

3.9 अपनी प्रगति की जाँच कीजिए के उत्तर के उत्तर

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 1

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को परिभाषित करें

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप एकल संख्या प्रदान करते हैं जो आँकड़ों की सामान्य परिमाण को इंगित करता है और यह एकल संख्या, आँकड़ों का केंद्रीय स्थान की पहचान कर उन आँकड़ों की विशेषताओं के बारे में जानकारी प्रदान करता है ।

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के कार्यों को सूचीबद्ध करें।

क) वे एक संक्षिप्त आँकड़ा प्रदान करते हैं जिसकी सहायता से पूरे आँकड़ों के केन्द्रीय स्थान को समझाया जा सकता है। जब हम एक निश्चित समूह के आ. ैसत की गणना करते हैं तो हमें पूरे आँकड़ों के बारे में एक अनुमान मिलता है।

ख) बड़ी मात्रा के आँकड़ों को आसानी से एकल संख्या में घटाया जा सकता है। माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना विशाल आँकड़ों के लिए की जा सकती है और एक एकल संख्या प्राप्त की जा सकती है।

ग) जब किसी प्रतिदर्श के लिए माध्य की गणना की जाती है, तो यह जनसंख्या के माध्य का अनुमान लगाने में सहायता करेगा।

घ) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की गणना से प्राप्त परिणाम कुछ निश्चित निर्णय लेने में सहायता करेंगे। यह न केवल शोध के संबंध में निर्णयों के लिए उपयुक्त हैं बल्कि अपितु नीति निर्माण, विपणन और विक्रय जैसे विभिन्न क्षेत्रों में भी उपयुक्त हो सकते हैं ।

ङ) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की सहायता से गणना किए गए एकल संख्या के आधार पर तुलना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, गणित विषय की परीक्षा में छात्रों के प्रदर्शन के संबंध में, लड़कियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों और लड़कों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों की तुलना की जा सकती है।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 2

1) उपयुक्त उदाहरणों के साथ माध्य, माध्यिका और बहुलाक का वर्णन करें।

माप	विवरण	उदाहरण
माध्य	माध्य में आकड़े में दिए गए सारे प्राप्तांको को जोड़कर जो अंक प्राप्त होता है उसे प्राप्तांकों की कुल संख्या से विभाजित किया जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे अधिक उपयोग किया जाने वाला माप है और इसे अक्सर औसत शब्द से भी सम्भोदित किया जाता है। इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के सबसे संवे. दनशील माप में से एक के रूप में भी कहा जा सकता है क्योंकि जब इसकी गणना की जाती है तब आँकड़ों में समिल्लित सभी प्राप्तांकों को ध्यान में रखा जाता है।	5 कर्मचारियों द्वारा कार्य संतुष्टि पर प्राप्तांक 23, 34, 54, 34, 22 (N = 5) है।, माध्य होगा 23+34+54+34+22=167 इस प्रकार माध्य 167/5 = 33.4
मध्यिका	मध्यिका एक व्यवस्थित किए गए वितरण का मध्य प्राप्तांक है। मध्यिका एक आँकड़ें में ऐसा बिंदु हैं जिसके ऊपर आधे अंक और आधे अंक नीचे स्थित होते हैं।	उपरोक्त उदाहरण में दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है 22, 23, 34, 34, 54 इस प्रकार मध्यिका 34 हैं
बहुलक	बहुलक किसी वितरण में वह प्राप्तांक है जो सबसे अधिक बार आता है। कुछ वितरण द्विबहुलक होते हैं, जहां दो बहुलक होते हैं। जब तीन बहुलक होते हैं, तो प्रयुक्त शब्द त्रिबहुलक है और जब चार या अधिक बहुलक होते हैं, तो हम बहुल बहुलक शब्द का उपयोग करते हैं। हालांकि, यदि वितरण में प्राप्तांक बहुत भिन्न है, तो यह संभव है कि कोई बहुलक न हो।	उपरोक्त उदाहरण में, 23, 34, 54, 34, 22 बहुलक 34 है जो दो बार आया है

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कैसे चुनें जा सकते है?

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का चयन माप की मापनी पर निर्भर करेगा और यह भी कि आँकड़ा प्रसामान्य रूप से वितरित किया गया है या नहीं।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 3

1) माध्य के गुणों को सूचीबद्ध करें

   अ) माध्य वितरण में प्रत्येक प्राप्तांक की वास्तविक स्थिति के प्रति संवेदनशील है और यदि वितरण में एक और प्राप्तांक जोड़ा जाता है, तो उस वितरण का माध्य या औसत बदल जाएगा।

   ब) माध्य किसी भी वितरण के संतुलित बिंदु को दर्शाता है और माध्य से सकारा. त्मक विचलन का पूर्णांक माध्य नकारात्मक विचलन के बराबर है (किंग और मिनियम, 2008)।

   स) माध्य विशेष रूप से तब प्रभावी होता है जब प्राप्तांक के योग को दर्शाने के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन करते हैं ।

2) मध्यिका के लाभ को सूचीबद्ध करें ।

   अ) मध्यिका की परिभाषा दृढ़ है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे माप की गुणवत्ता है।

   ब) इसे समझना और गणना करना आसान है।

   स) यह आँकड़ा आउटलायर्स या सीमान्त संख्या से प्रभावित नहीं होता है।

   द) जब तक की मध्यिका एक उन्मुक्त निरपेक्ष वर्ग में नहीं आता, तब तक इसकी लक्ष्य निरपेक्ष वर्ग के साथ समूहीकृत आँकड़े के लिए गणना कि जा सकती है।

   ई) कुछ मामलों में निरीक्षण के माध्यम से और साथ ही रेखांकन के माध्यम से मध्यिका की पहचान करना संभव है।

3) बहुलक की सीमाओं को सूचीबद्ध करें।

   अ) कभी–कभी यह संभव है की आँकड़े के प्राप्तांक एक दूसरे से भिन्न हैं? ऐसे मामलों में आँकड़े का कोई बहुलक नहीं हो सकता है।

   ब) बहुलक को दृढ़ता से परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

   स) द्विबहुलक, त्रिबहुलक या बहुल बहुलक वितरण के मामले में, व्याख्या और तुलना कठिन हो जाती है।

   द) बहुलक पूरे वितरण पर आधारित नहीं हातो।

   ई) बहुलक के आधार पर आगे की गणितीय प्रक्रियाओं की गणना करना संभव नहीं है।

   च) प्रतिदर्श के उतार–चढ़ाव से बहुलक पर प्रभाव पड़ सकता है।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 4

1) निम्न आँकड़ों के लिए माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना करें:

   23, 34, 43, 65, 67, 67, 67, 78, 65, 43, 34, 45, 33, 23, 67, 60 (N = 15)

   माध्य = 49.8, मध्यांक= 45, बहुलक = 67

2) निम्नलिखित आँकड़े के लिए माध्य की गणना करें:

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्ति *(f)*
50- 59	4
40- 49	5
30- 39	6
20- 29	5
10- 19	5
1- 9	5
	N= 30

माध्य = 28.83

3.10 इकाई अंत प्रश्न

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति के अच्छे मापों की विशेषताओं पर ध्यान देने के साथ केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की अवधारणा पर चर्चा कीजिए।

2) माध्य, मध्यिका और बहुलक के गुणों की व्याख्या कीजिए।

3) माध्य, मध्यिका और बहुलक की सीमाओं की चर्चा कीजिए।

4) निम्नलिखित आँकड़े के लिए माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना कीजिए:

   44, 32, 34, 34, 45, 54, 56, 54, 55, 58, 45, 56, 54, 55, 56, 67, 79, 77, 88, 66, 89, 65, 43, 45, 54

5) निम्नलिखित आँकड़े के लिए माध्य, मध्यिका और बहुलक की गणना कीजिए:

वर्ग अंतराल (अंक)	आवृत्ति *(f)*
50- 59	12
40- 49	10
30- 39	9
20- 29	11
10- 19	8
1- 9	10
	N= 60

इकाई 4 परिवर्तनशीलता के मापों का परिचयात्मक अध्ययन *

संरचना

4.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- परिवर्तनशीलता की अवधारणा की व्याख्या कर सकेंगे;
- परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन और मानक विचलन के गुणों, सीमाओं और उपयोग का वर्णन कर सकेंगे; तथा
- प्रसरण और प्रसरण का गुणांक की व्याख्या कर सकेंगे ।

4.1 प्रस्तावना

नीचे दिए गए दो आँकड़ों को देखिए।

---

* प्रो. उषा कुलश्रेष्ठ, प्रध्यापक, मनोविज्ञान विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

श्रेणी अ 8, 2, 6, 4, 8, 2, 10, 5, 5, 10 (N = 10, कुल = 60, माध्य = 6)

श्रेणी ब 7, 7, 7, 6, 7, 5, 5, 6, 5, 5 (N = 10, कुल = 60, माध्य = 6)

उपर दी गई श्रेणी अ और ब पर एक दृष्टि डालने पर हमे पता चलता है की श्रेणी अ, श्रेणी ब की तुलना में अधिक सजातीय है। आँकड़ें में विभिन्नता को बेहतर समझने के लिए, विभिन्न परिवर्तनशीलता के मापों की गणना करने की आवश्यकता है।

पिछली इकाई में, हमने केंद्रीय प्रवृत्ति के माप अर्थात, माध्य, माध्यिका और बहुलक के मापों पर चर्चा की थी। इन मापों से हमें आँकड़ें के औसत के विषय में पता चलता है।

लेकिन वितरण में भिन्नता होने के कारण औसत आँकड़ें का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता। जैसे की उपरोक्त उदाहरण में देखा जा सकता है की श्रेणी अ और ब का माध्य सामान है लेकिन ये दो आँकड़ें एक दूसरे से विचलन के आधार पर भिन्न है। इसलिए आँकड़ें में भिन्नता पर विचार करना आवश्यक है। इस इकाई में, हम परिवर्तनशीलता (जिसे प्रकिंर्णन शब्द से भी सम्बोधित किया जा सकता है) की अवधारणा के विषय में चर्चा करेंगे । प्रक. ीर्णन एक समूह द्वारा प्राप्त प्राप्तांको के भीतर और बीच में प्रसरण को संदर्भित करता है। औसत में प्राप्तांका ेंका अभिसरण एक प्रसामान्य संभाव्यता वितरण के मध्य बिंदु की तरफ होता है। प्रकीर्णन में हम ये जानने की कोशिश करते है की एक समूह में हर एक प्राप्तांक माध्य या औसत प्राप्तांक से कितना भिन्न है। जब प्रकीर्णन बड़ा होता है तो हम यह कह सकते है की समूह सजातीय नहीं है और जब प्रकीर्णन कम होता है तो हम यह कह सकते है की समूह सजातीय है। प्रकीर्णन एक महत्वपूर्ण सांख्यिकी है जो हमे ये समझने में सहायता करती है की क्या प्रतिदर्श जनसंख्या से भिन्न है या नहीं । यह हमें माध्य के मानक त्रुटि के विषय में बताता है।

वर्तमान इकाई में, हम परिवर्तनशीलता के अर्थ और महत्व पर चर्चा करेंगे। परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन और मानक विचलन के गुणों और सीमाओं पर भी चर्चा करेंगे । इसके अलावा, प्रसरण और प्रसरण का गुणांक की व्याख्या करेंगे ।

4.2 आँकडे में परिवर्तनशीलता की अवधारणा

परिवर्तनशीलता का अर्थ है औसत अंक से समूह या श्रृंखला में प्राप्तांक का प्रकीर्णन। यह वास्तव में माध्य के संबंध में समूह में प्राप्तांक के प्रसार को संदर्भित करता है। इसे प्रक. ीर्णन के रूप में भी जाना जाता है। उदाहरण के लिए, एक समूह में 10 प्रतिभागी है जिन्होंने गणित विषय की परीक्षा में अलग–अलग अंक प्राप्त किए हैं । प्रत्येक व्यक्ति के प्राप्त अंक दूसरे से भिन्न होता है। परिवर्तनशीलता के मापों की सहायता से इन विचरण को मापा जा सकता है। परिवर्तनशीलता के माप औसत मान या औसत के लिए विभिन्न मानों के प्रकीर्णन को मापते हैं। परिवर्तनशीलता या प्रकीर्णन का अर्थ एक समूह में मानों का बिखराव भी है। वितरण में उच्च परिवर्तनशीलता का अर्थ है की प्राप्तांक व्यापक रूप से फैले हुए हैं और सजातीय नहीं है। कम परिवर्तनशीलता का अर्थ है कि प्राप्तांक समान और सजातीय है और बीच में केंद्रित हैं। मिनियम, किंग और बेयर (2001) के अनुसार, परिवर्तनशीलता के माप मात्रात्मक रूप में यह बताते है की एक वितरण में प्राप. तांक किस सीमा तक विकीर्ण है या समूह में है । परिवर्तनशीलता के माप, वितरण के आकार या किसी समूह के प्रदर्शन के स्तर के विषय में जानकारी प्रदान नहीं करते हैं।

परिवर्तनशीलता के माप वर्णनात्मक सांख्यिकी के अंतर्गत आते हैं जो वर्णन करते हैं की , एक सेट में दिए गए प्राप्तांक किस सीमा तक एक सामान है। यदि प्राप्तांक एक सामान है तो परिवर्तनविलता कम होगी और यदि प्राप्तांक एक दूसरे के सामान नहीं है तो परिवर्तनशीलता अधिक होगी। आम तौर पर जितना ज्यादा वितरण का प्रसार उतनी

ज्यादा परिवर्तनशीलता होगी। संक्षेप में यह कहा जा सकता है की एक प्रतिदर्श से एकत्रित आँकड़े के मानों में विचरण को प्रकीर्णन कहा जा सकता है। परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन और मानक विचलन अधिकतर प्रयोग होने वाला परिवर्तनशीलता के माप है।

पछली इकाई में, केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों पर चर्चा की गई थी। जबकि केंद्रीय प्रवृत्तियों के माप वास्तव में बहुत मूल्यवान हैं, मगर उनकी उपयोगिता सीमित है। यद्यपि इन मापों के माध्यम से हम दो या दो से अधिक समूहों की तुलना कर सकते हैं । लेकिन तुलना के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति के माप पर्याप्त नहीं है । वे हर एक प्राप्तांक का प्रसार कैसा है यह नहीं दिखाते हैं।

एक और उदाहरण लेते है, एक गणित के िक्षक / शिक्षिका दो छात्र के समूह का प्रदर्शन जानना चाहते हैं। वे इन छात्रों की एक 40 अंकों का प्रश्न पत्र देते है। इस परीक्षा में छात्रों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक इस प्रकार है :

समूह अः 5,4,38,38,20,36,17,19,18,5 (N = 10, कुल = 200, माध्य =20)

समूह बः 22,18,19,21,20,23,17,20,18,22 (N = 10, कुल = 30, माध्य = 20)

दोनों समूहों का माध्य 20 है, इसका अर्थ यह है की दो समूहों के प्रदर्शन में कोई अंतर नहीं है। लेकिन दोनों समूहों के प्रदर्शन में भिन्नता है क्योंकि प्रत्ये छात्र के प्राप्तांक एक दूसरे से भिन्न है। जैसे देखा जा सकता है समूह अ के परीक्षा में प्राप्तांक का परास 5 से 38 है और समूह ब का पारस 18 से 23 है। इसका अर्थ ये है की समूह अ के कुछ छात्र बेहतर कर रहे है, कुछ छात्रों का प्रदर्शन अच्छा नहीं है और कुछ छात्रों का प्रदर्शन औसत के बराबर है। दूसरी ओर यदि हम समूह ब के छात्रों का प्रदार्न देखते है तो वह माध्य (जो 20 है) के समन या आसपास है। इस प्रकार हम यह कह सकते है की केन्द्रिया प्रवृत्ति के माप हमे एक प्राप्तांक के सेट की अधूरी तस्वीर दिखाते है और इसी लिए हमे केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों के साथ परिवर्तनशीलता के मापों की भी जरुरत है। केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों के विषय में हम यह कह सकते है की वे एक प्राप्तांक का सारांश है और परिवर्तनशीलता के मापों के विषयं में हम यह कह सकते है की यह प्राप्तांक के पसार का सारांश है। इस प्रकार परिवर्तनशीलता की जानकारी उतनी ही जरुरी है जितनी केंद्रीय प्रवृत्ति की जानकारी है।

परिवर्तनशीलता या प्रकीर्णन को हम औसत की द्वितीय मात्रा (average of the second degree) भी कहते है क्योंकि इसमें हम हर एक एकांश के मान का माध्य से प्रकीर्णन के माध्य पर गौर करते है। इसलिए एक वितरण का वर्णन करते समय हमे केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों के साथ परिवर्तनशीलता के मापों को भी प्रदान करना होगा। परिवर्तनशीलता के माप सांख्यिकीय अनुमान में महत्वपूर्ण है। प्रकीर्णन के मापों की सहायता से हम यादृच्छिक प्रतिदर्श में उतार–चढ़ाव के विषय में जान सकते है। एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में उत्तर–चढाव कैसा है? यह एक मुलभुत प्रश्न है, यह प्रश्न परिवर्तनशीलता के विषय में है।

परिवर्तनशीलता के माप निम्नलिखित उद्देश्यों के लिए महत्वपूर्ण हैं:

1) परिवर्तन'ीलता के मापों का प्रयोग एक औसत किस सीमा तक एक आँकड़े के वि'ोषताओं का प्रतिनिधित्व करता है इसका परीक्षण करने में हो सकता है। यदि विचरण कम है तो यह कह सकते है की वितरण में मानों की एकरूपता अधिक है और औसत आँकड़े की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता है । दूसरी ओर यदि

विचरण अधिक है तो यह दर्शाता है की मानों की एकरूपता कम है और औसत अविश्वसनीय है।

2) परिवर्तन'ीलता के माप विचरण की प्रकृति और कारण की पहचान करने में सहायता करते हैं। ऐसी जानकारी विचरण को नियंत्रित करने के लिए उपयोगी हो सकती है।

3) परिवर्तनशीलता के माप एकरूपता या स्थिरता पर आधारित दो या दो से अधिक आँकड़ों के सेट के पसार की तुलना करने में सहायता करते है।

4) परिवर्तन'ीलता के माप अन्य सांख्यिकीय तकनीकों के उपयोग की सुविधा प्रदान करते हैं जैसे कि सहसंबंध, प्रतिगमन वि'लेषण आदि।

4.2.1 परिवर्तनशीलता के कार्य

परिवर्तनशीलता के प्रमुख कार्य इस प्रकार हैं :

1) इसका उपयोग अन्य आँकड़ों की गणना के लिए किया जाता है जैसे कि प्रसरण, सहसंबंध की मात्रा, प्रतिगमन आदि।

2) इसका उपयोग प्राप्त आँकड़ों के परिवर्तनशीलता की तुलना करने के लिए भी किया जाता है जैसे कि सामाजिक–आर्थिक स्थिति, आय, शिक्षा आदि।

3) इसका उपयोग, यह पता लगाने के लिए किया जा सकता है, की औसत या माध्यः माध्यिक / बहुलक वि'वसनीय है या नहीं । यदि विचरण छोटा है तो हम यह कह सकते हैं की औसत की गणना विश्वसनीय है, लेकिन यदि विचरण बहुत बड़ा है, तो औसत त्रुटिपूर्ण हो सकता है।

4) प्रकीर्णन हमें विचार देता है की क्या परिवर्तनशीलता प्रतिकूल रूप से आँकड़े को प्रभावित कर रहा है या नही और इस तरह प्रकीर्णन विचरण का नियंत्रिण करने में सहायता करता है।

4.2.2 निरपेक्ष प्रकीर्णन और सापेक्ष प्रकीर्णन

प्रकीर्णन के माप मात्रात्मक रूप से एक प्रतिदर्श में दिए गए हर एक प्राप्तांक का माध्य और मध्यिका से विचलन के विषय में अनुमान प्रदान करता हैं। इस प्रकार, परिवर्तनशीलता के संख्यात्मक माप एक केंद्रीय मान के चारों ओर फैलते हैं।

प्रकीर्णन को मापने में, विचरण की मात्रा (निरपेक्ष माप) और विचरण की डिग्री (सापेक्ष माप) को जानना अनिवार्य है। निरपेक्ष माप मे परास, माध्य विचलन, मानक विचलन आदि सम्मिलित है और सापेक्ष माप मे परास के गुणांक, माध्य विचलन के गुणांक और प्रसरण के गुणांक सम्मिलित है । इस प्रकार, परिवर्तन'ीलता या प्रकीर्णन के दो व्यापक वर्ग हैं, प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप और प्रकीर्णन का सापेक्ष माप।

निरपेक्ष प्रकीर्णन को मानक विचलन भी कहा जाता है, अर्थात माध्य से विचरण का माप। मानक विचलन का मात्रक आँकड़े के मात्रक के सामान होता है। दूसरे शब्दों में, निरपेक्ष माप को एक वितरण के मूलरूप मात्रक में व्यक्त किया जाता है। इसलिए निरपेक्ष प्रकीर्णन का प्रयोग दो वितरणों के परिवर्तनशीलता की तुलना के लिए नहीं कर सकते जो दो चर भिन्न मात्रक में व्यक्त किये गए है। उदाहरण के लिए लम्बाई का परिवर्तनशीलता (सेंटी मीटर) और वजन का परिवर्तनशीलता (किलोग्राम) के बीच तुलना नहीं कर सकते है।

जब दो प्र्प्तांकों के सेट जिनके मात्रक सामान है लेकिन माध्य (मध्य अंक) से अपसरण विस्तृत है, ऐसी स्थिति में निरपेक्ष माप उचित नहीं। तथापि, निरपेक्ष माप का प्रयोग विस्तृत रूप से किया जाता है, ऊपर चर्चित किये गए असाधारण मामलों को छोड़ कर। निरपेक्ष माप में परास, माध्य विचलन, मानक विचलन और प्रसारण समिल्लित है।

सापेक्ष प्रकीर्णन, जिसे कभी कभी प्रसारण का गुणांक भी कहा जाता है, यह मानक विचलन को माध्य से विभाजित करने पे प्राप्त होता है और इसे लब्धि (quotient) या प्रतिशत के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इस तरह सापेक्ष माप की गणना प्रकीर्णन के निरपेक्ष माप और इसके अनुरूपित मध्य मानों से होती है। यदि सापेक्ष प्रकीर्णन का मान कम है तो इसका अर्थ है की माध्य के परिमाण की तुलना में मानक विचलन छोटा है। उदाहरण के लिए यदि 30 अंको के लिए माध्य से मानक विचलन यदि 6.0 है तो प्रसारण का गुणांक होगा :

6.0 / 30 = 0.2 (लगभग 20%)

यदि माध्य 60 अंक का है और मानक विचलन 6.0 ही है तो प्रसारण का गुणांक होगा

6.0 / 60 = 0.1 (10%)

हालांकि, सापेक्ष माप 1 से अधिक होगा जब शुन्य के दोनों तरफ के माप लिए जाते है और माध्य शुन्य के निकट होता है। हमे यह भी याद रखना है की दो वितरण की समान परिवर्तनशीलता बहुत ही कम मामलों में पायी जाती है। कभी कभी, वितरण विषम होता है और प्रसामान्य नहीं होता, जहाँ माध्य, मध्यिका और बहुलक सतातत्य पे अलग अलग बिंद.ुओं पर पड़ते है। इन वितरणें को विषम वितरण कहा जाता है (विषम के विषय में हम इकाई 8 में चर्चा करेंगे)। यह भी संभव है की दो वितरण, प्रसरण में समान है लेकिन उनके माध्य सामान नहीं है और उनके आकर भिन्न है। इस तरह सापेक्ष माप को मानक विचलन जैसे निरपेक्ष माप और माध्य के अनुपात से व्युत्पन्न किया जाता है और इसे प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार सापेक्ष माप प्राप्तांक के दो सेट (जिनका मात्रक भिन्न है) के प्रसरण की तुलना के लिए उपयुक्त है। इनका उपयोग तब भी किया जाता है जब दो प्राप्तांको के सेट, जिनके मात्रक सामान है, लेकिन माध्य विस्तृत रूप से अपसरित है। सापेक्ष माप में परास के गुणांक, माध्य विचलन के गुणांक और प्रसरण के गुणांक सम्मिलित है।

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 1

1) परिवर्तनशीलता के किसी भी एक कार्य को बताएं।

……………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2) प्रकीर्णन के दो व्यापक मापों को सूचीबद्ध करें ।

……………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………
.

....
.

....
.

4.3 परिवर्तनशीलता या प्रकीर्णन के विभिन्न माप (परिवर्तनशीलता के माप के प्रकार)

मनोवैज्ञानिक आँकड़ों में सबसे अधिक उपयोग किये जाने वाली परिवर्तनशीलता के माप निम्नलिखित हैं ।

1) परास
2) चतुर्थक विचलन
3) औसत विचलन
4) मानक विचलन
5) प्रसरण

परास और चतर्थक विचलन, पसार, जिसमे मान समावित है, की गणना करके प्रकीर्णन का मापन करते है। और औसत विचलन और मानक विचलन, किस सीमा तक मान औसत से भिन्न है, इसकी गणना करते है।

4.3.1 परास (R)

परास को उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक के बीच के अंतर के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसकी गणना वितरण के उच्चतम प्राप्तांक से न्यूनतम प्राप्तांक को घटाकर की जाती है । समीकरण इस प्रकार है ।

परास = उच्चतम प्राप्तांक – न्यूनतम प्राप्तांक ($R = H\text{-}L$)

परास प्रकीर्णन का एक मोटा (rough) माप है क्योंकि यह हमे चरम प्राप्तांको के बीच के प्रसार के विषय में बताता है लेकिन बीच के प्राप्तांकोक के प्रसार के विषय में नहीं बताता। उदाहरण के लिए, 4,10,12,20, 25, 50 वितरण का परास होगा 50 – 4 = 46

4.3.1.1 परास के गुण और सीमाएँ

1) परिवर्तनशीलता के अन्य मापों की तुलना में इसकी गणना करना आसान है और इसका अर्थ प्रत्यक्ष है।
2) परास प्रारंभिक कार्य या अन्य परिस्थितियों के लिए आदर्श है जहां परिशुद्धता एक महत्वपूर्ण आवश्यकता नहीं है (मिनियम एवं अन्य 2001)।
3) यह उस स्थिति में काफी उपयोगी है जहां उद्देश्य केवल अत्यधिक परिवर्तन का पता लगाना होता है जैसे तापमान, वर्षा आदि।
4) परास एक छोटे प्रतिदर्श के सार्थकता के परीक्षण में प्रभावी रूप से उपयुक्त हो सकता है।

परास के सीमाएँ निम्नलिखित हैं ।

1) परास की गणना केवल वितरण में दिए गए सिर्फ दो चरम मूल्यों पर आधारित है और अन्य मूल्यों को इसकी गणन में शामिल नहीं किया जाता। कभी कभी ऐसा हो सकता है की दो भिन्न आँकडों के चरम मान सामान या एक जैसे हो लेकिन ये दो आँकड़ों के सेट प्रकीर्णन में भिन्न हो सकते हैं।

2) इसका मान प्रतिदर्श में परिवर्तन के प्रति संवेदनशील है। और यह प्रतिदर्श में उताऱ–चढाव से प्रभावित होता है। इसका अर्थ है की एक ही जनसख्या से लिए गए एक ही आकार के भिन्न प्रतिदर्श के परास अलग अलग हो सकते है।

3) आगर प्रतिदर्श का आकर बड़ा है तो उसका प्रभाव परास के ऊपर हो सकता है। वितरण के प्रकारों में ;प्रसामान्य वितरण सहितद्ध परास प्रतिदर्श के आकर पर निर्भर होता है। प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि के साथ प्रतिचयन प्रसरण तेजी से बढ़ता है।

4) मुक्तांत निरपेक्ष वर्ग के लिए परास का उपयोग नहीं किया जा सकता है क्योंकि वितरण के निम्नतम और उच्चत्तम प्राप्तांक उपलब्ध नहीं होते है, और इस प्रकार परास की गणना नहीं की जा सकती है।

5) आगे की गणितीय गणना परास के लिए संभव नहीं है।

6) परास दो चरम प्राप्तांकों को इंगित करता है । इस प्रकार मध्यवर्ती प्राप्तांकों के पि. रमाण या आवृत्ति के विषय में जानकारी प्राप्त नहीं होती है।

7) परास वितरण के प्रपत्र, जैसे विषमता, कुर्टोसिस और प्राप्तांक का बहुलकी वितरण, को इंगित नहीं करता है।

8) एकल चरम प्राप्तांक परास को अनुपातहीन ढंग से बढ़ा सकता है।

4.3.1.2 परास का उपयोग

परास को विभिन्न क्षेत्रों में लागू किया जा सकता है ।

1) परास का उपयोग उन क्षेत्रों में किया जाता है जहां छोटे उतार–चढ़ाव देखें जा सकते हैं जैसे की स्टॉक बाजार, विनिमय की दर, आदि।

2) परास को दिन–प्रतिदिन की गतिविधियों में उपयोग किय जा सकता है, जैसे की किराने की दुकान में दैनिक बिक्री, कारखाने में मासिक मजदूरी, आदि।

3) परास का उपयोग मौसम के पूर्वानुमान में किया जाता है, जैसे एक दिन में तापमान में विचरण ।

4) जब शोधकर्ता केवल चरम प्राप्तांक या कुल प्राप्तांक के प्रसार में रुचि रखते है, तब परास परिवर्तनशीलता का सबसे उपयोगी माप है।

5) परास का उपयोग तब भी किया जा सकता है जब आँकड़ा अल्प है या अधिक बिखरा हुआ है, जिसके वजह से सबसे उपयुक्त परिवर्तनशीलता के माप का प्रयोग नहीं कर सकते ।

4.3.2 चतुर्थक विचलन (QD)

चूंकि मानों की बड़ी संख्या आवृत्ति वितरण के बीच में होती है और परास वितरण के चरम मानों पर निर्भर करता है, हमें परिवर्तनशीलता के अन्य माप की जरूरत है। चतुर्थक विचलन एक ऐसा माप है जो की वितरण के अपेक्षाकृत स्थिर मध्य भाग पर निर्भर करता है। गैरेट (1966), के अनुसार चतुर्थक विचलन, एक आवृत्ति वितरण के 75 वे और 25 वे

प्रतिशत की पैमाना दूरी (scale distance) का आधा है। पूरा आँकड़ा चार समान भागों में बाटा जाता है और हर एक भाग में 25 प्रतिशत मान होते है। गिलफोर्ड (1963) के अनुसार अर्ध–अंतर चतुर्थक परास, बीच के 50 प्रतीशत अंकों के परास का आधा होता है।

उपरोक्त परिभाषा पर आधारित यह कहा जा सकता है की चतुर्थक विचलन Q_1 और Q_3 के बीच की दूरी का आधा है।

अंतर चतुर्थक परासः एक वितरण के मध्य 50% के परास की गणना की जाती है तो इस परास को अंतर चतुर्थक परास कहा जाता है। अंतर चतुर्थक परास की गणना करते वक्त उच्च चतुर्थक (Q_3) और निम्न चतुर्थक (Q_1) का प्रयोग किया जाता है। यह Q_3-Q_1 है। अंतर चतुर्थक परास चरम मानों से प्रभावित नहीं होता है।

अर्ध–अंतर चतुर्थक परास या चतुर्थक विचलन (QD)ः अंतर चतुर्थक परास के आधे को अर्ध– अंतर चतुर्थक परास कहा जाता है। इसे चतुर्थक विचलन भी कहा जाता है। और QD की गणना इस प्रकार की जाती है

$$QD=Q_3 - Q_1/2$$

इस प्रकार, अंतर चतुर्थक परास को 2 से विभाजित करके चतुर्थक विचलन प्राप्त किया जा सकता है।

चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का निरपेक्ष मापन है और इसे प्राप्तांकों के मात्रक के सामान मात्रक में व्यक्त किया जाता है। चतुर्थक विचलन और मध्यिका निकट रूप से सम्बंधित हैं क्यूंकि मध्यिका

प्राप्तांको के सटीक स्थिति के बजाय अपने निचले प्राप्तांको के ओर प्रतिक्रियात्मक होती है और Q_1 और Q_3 की परिभाषा इसी प्रकार की जाती है। मध्यिका और चतुर्थक विचलन में समान गुण हैं। मध्यिका और चतुर्थक विचलन, दोनों चरम मानों से प्रभावित नहीं होते हैं। एक सममित वितरण में, दो चतुर्थक (Q_1) और (Q_3) माध्यिका या (Q_1) = (Q_3) – मध्यिका, से समान दूरी पर होते हैं। इस प्रकार, माध्यिका की ही तरह, चतुर्थक विचलन अवलोकन के ठीक 50 प्रतिशत का आवरण करता है। प्रसामान्य वितरण में, चतुर्थक विचलन को प्रसंभावित त्रुटि या PE कहा जाता है। यदि वितरण उन्मुक्त वर्ग वाला हैं, तो चतुर्थक विचलन परिवर्तनशीलता का एकमात्र माप है जो गणना करने के लिए उचित है।

एक असममित या विषम वितरण में Q_1 और Q_3, मध्यिका से सामान अंतर पर नही होते है या $Q_1 = Q_3$ – माध्यिका। ऐसे वितरण में अंतर चतुर्थक परास की मध्यिका, विषम पुश्त (tail) की ओर बढ़ती है। विषम की मात्रा (डिग्री) और दिशा का मूल्यां्कन चतुर्थक विचलन से और Q_1, Q_2 और Q_3 के बीच के सापेक्ष दुरी से किया जा सकता है।

कुर्टोसिस, चतुर्थ विचलन से आनुपातिक होता है। जीतना छोटा चतुर्थ विचलन होता है उतना ही ज्यादा प्राप्तांको का सकेन्द्रण एक वितरण के मध्य भाग में होता है। ऐसे वितरण में ऊँची चोटी होती है और उसका निकाय सकीर्ण होता है। व्यापक रूप से प्रकीर्ण प्राप्तांक एक बड़े चतुर्थक विचलन को इंगित करता है। इस तरह से अंतर चतुर्थक परास लम्बा होता है। ऐसे वितरण मे कम चोटी है और निकाय चौड़ा होता है।

4.3.2.1 चतुर्थांक विचलन के गुण और सीमाएँ

उपरोक्त दिए गए स्पष्टीकरण से यह स्पष्ट हो जाता है की चतुर्थक विचलन समझने में आसान है और उसकी गणना भी सरल है।

1) परास की तुलना में चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का बेहतर माप है क्योंकि इसमें 50% आँकड़े समावित किये जाते है। परास, वितरण के केवल दो मानों, उच्चतम और निम्नतम, पर आधारित होता है।

2) चतुर्थक विचलन चरम प्राप्तांको से प्रभावित नहीं होता क्यूंकि इसमें आँकड़े के शुरू के 25 प्रतिशत और अंत के 25 प्रतिशत प्राप्तांक समावित नहीं किये जाते है।

3) चतुर्थक विचलन की गणना एक मुक्तांत निरपेक्ष वर्ग वाले आवृती वितरण के लिए की जा सकती है।

चतुर्थक विचलन के प्रमुख गुणों के बावजूद, इसकी कुछ सीमाएँ हैं।

1) चतुर्थक विचलन का मान मध्य 50 % मानों पर आधारित होता है। यह सभी अवलो. कनों पर आधारित नहीं होता है। इस तरह इसे परिवर्तनशीलता का स्थिर माप नहीं कहा जा सकता है।

2) चतुर्थक विचलन, प्रतिदर्श में उतार–चढाव से प्रभावित होता है।

3) मध्य 50 प्रतिशत अंतराल में दिए गए अवलोकित मानो में हर एक मान के वितरण का प्रभाव चतुर्थक विचलन पर नहीं होता है।

4.3.2.2 चतुर्थांक विचलन का उपयोग

1) जब वितरण में कुछ लेकिन अधिक चरम प्राप्तांक सम्मिलित है।

2) जब केंद्रीय प्रवृत्ति का माप माध्यिका है।

3) जब हमारी प्राथमिक रूचि मध्यिका के आस पास वाले सकेन्द्रीकरण को निर्धारित करना है।

4.3.3 औसत विचलन या माध्य विचलन (AD/ MD)

परिवर्तनशीलता के दो माप, परास और चतुर्थक विचलन, जिनकी हमने पूर्व उपखण्ड में चर्चा की थी, वे हमे यह नहीं बताते है की आँकड़े में दिए गए मान केंद्रीय मान पर कैसे बिखरे है। परास और चतुर्थक विचलन, मान के पसार की गणना करते है। वे मानों की औसत से दूरी की गणना नहीं करते है। विचरण का मापन, मानों की उनके माध्य से विचलन की मात्रा के रूप में करने के लिए औसत विचलन का उपयोग कर सकते हैं।

औसत विचलन के विषय में चर्चा करने से पहले हमे विचलन के विषय में जानना होगा। विचलन प्राप्तांक, प्राप्तांक, वितरण के माध्य से कितने प्राप्तांक बिंदुओं से ऊपर या नीचे है यह इंगित करके प्राप्तांक की जगह व्यक्त करता है । विचलन प्राप्तांक को (X-Mean) से परिभाषित किया जा सकता है। इसका अर्थ है की जब माध्य को हर एक असंसाधित प्राप्तांक से घटाकर जो विचलन प्राप्तांक प्राप्त होता है वह माध्य से प्राप्तांक की सापेक्ष स्थिति के विषयमें बताता है।

गैरेट (1971) के अनुसार (मंगल 2002 में उद्धृत किया गया, पृष्ठ 70), ''औसत विचलन का वर्णन सारे विचलनों के औसत या माध्य (बीजगणितीय चिन्हो को बीना विचारे) के रूप में किया जा सकता है''।

औसत एक केंद्रीय मान है और इस प्रकार थोड़े विचलन घनात्मक (+) और थोड़े ऋणात्मक (–) हो सकते हैं। माध्य विचलन, विचलनों के चिन्हों पर ध्यान नहीं देता है, क्यूंकि सभी विचलनों के बीजगणितीय योग शुन्य होता है। औसत विचलन या माध्य विचलन, मानों की औसत से अंतर का अंकगणित माध्य है। औसत या तो अंकगणित माध्य या मध्यिका है । यह परिवर्तनशीलता का एक माप है जो आँकड़ों के सारे प्राप्तांको को

सम्मिलित करता है। यह प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है और इसकी व्याख्या असंसाधित आँकड़ों के मात्रक के रूप में की जाती है।

औसत विचलन की गणना सरल होती है और इसलिए यह काफी प्रसिद्व माप है। जब औसत विचलन की गणना की जाती है तो, हर एक अवलोकित मान को समान महत्व दिया जाता है। इस प्रकार यह इंगित करता है की हर एक अवलोकन माध्य से कितने अंतर पर है। औसत विचलन या माध्य विचलन को केंद्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप, माध्य, मध्यिका या बहुलक, से प्राप्त किया जा सकता है। क्योंकि बहुलक की परिभाषा अस्पष्ठ होती है, इसलिए औसत विचलन की गणना माध्य और मध्यिका से की जाती है। मध्यिका से किया गया औसत विचलन, माध्य से किये गए औसत विचलन से कम होता है। सममित वितरण के लिए, माध्य से माध्य विचलन और मध्यिका से माध्य विचलन, आँकड़े के 57.7 प्रतिशत आकलनों का आवरण करता है.। इस प्रकार यदि माध्य विचलन का मान कम है तो वह कम परिवर्तनशीलता को इंगित करता है। औसत विचलन, (अवलोकन का 57.7 प्रतिशत) चतुर्थक विचलन (अवलोकन का 50 प्रतिशत) से कुछ सीमा तक बड़ा होता है।

4.3.3.1 औसत विचलन के गुण और सीमाएँ

औसत विचलन के गुण इस प्रकार है:

1) औसत विचलन समझने और गणना करने में आसान है।
2) यह, परास और चतुर्थक विचलन के विपरीत, सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।
3) यह परिवर्तनशीलता का यथार्थ माप है क्यूंकि यह निरपेक्ष विचलन का औसत प्रदान करता है।
4) यह चरम अवलोकनों से कम प्रभावित होता है।
5) यह औसत पर आधारित है, इस लिए यह विभिन्न वितरणों की रचना की तुलना का बेहतर माप है।

औसत विचलन के मुख्या सीमाएं इस प्रकार है:

1) औसत विचलन की गणना करते समय धन ऋण चिन्हों पर ध्यान नहीं देते है और सभी मानों को धन विचारते है।
2) औसत विचलन की गणना मुक्तांत निरपेक्ष वर्ग के लिए नहीं की जा सकती है।
3) जैसे प्रतिदर्श का आकर बढ़ता है, औसत विचलन भी बढ़ता है।

4.3.3.2 औसत विचलन का उपयोग

औसतन विचलनों के सीमाओं के बावजूद यह अर्थशात्री और व्यापार सांख्यिकीविद् द्वारा उपयोग किया जाता है। यह किसी समुदाय या राष्ट्र में व्यक्तिगत धन के वितरण की गणना करने में भी प्रयोग किया जा सकता है।

नेशनल ब्यूरो ऑफ इकोनॉमिक्स रिसर्च के अनुसार, माध्य विचलन, इस उद्देश्य के लिए उपयोग किए जाने वाले प्रकीर्णन का एक प्रायोगिक माप है (मोहंती और मिश्रा, 2016, पृष्ठ 133)।

1) जब सरे विचलनों को माध्य से उनके आकर के अनुसार भारित किया जाता है।

2) जब मानक विचलन अनुचित रूप से चरम प्राप्तांको से प्रभावित होता है।

3) प्राप्तांकों का वितरण, प्रसामान्य के निकट नहीं है।

4.3.4 मानक विचलन (SD)

मानक विचलन शब्द का पहला प्रयोग कार्ल पीयरसन द्वारा 1894 में किया गया था। जनसंख्या का मानक विचलन इस चिन्ह से 'σ' (ग्रीक अक्षर सिग्मा) से निरूपित किया जाता है। मानक विचलन का एक उपयोगी गुण यह है की वह, प्रसारण से विपरीत, आँकड़े के मात्रक के समान मात्रक में व्यक्त किया जाता है। यह परिवर्तनशीलता का सबसे व्यापक रूप से उपयोग किया जाने वाला माप है। मानक विचलन, सारे प्राप्तांको का माध्य से दूरी का औसत इंगित करता है। यह सभी प्राप्तांको का माध्य से वर्ग (squared) विचलन के माध्य का घनात्मक वर्गमूल (स्क्वेर रुट) है। यह प्रसरण का घनात्मक वर्गमूल है। इसे 'मूल माध्य वर्ग विचलन' (root mean square deviation) भी कहा जाता है। मंगल (2002 , पृष्ठ 71) मानक विचलन को परिभाषित इस प्रकार करते हैं ''यह प्रत्येक प्राप्तांक का माध्य से विचलन के वर्ग के औसत का वर्गमूल है''। मानक विचलन, प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है और यह परिवर्तनशीलता का सबसे अधिक स्थिर और विश्वसनीय माप है।

मानक विचलन माध्य से कितना प्रसरण है यह दर्शाता है। मानक विचलन की गणना केवल माध्य से की जाती है। यदि मानक विचलन कम है तो इसका अर्थ है की आँकड़ा माध्य के निकट है। अधिक मानक विचलन यह दर्शाता है की आँकड़ा एक मानों के बड़े परास में बिखरा हुआ है। मानक विचलन का प्रयोग अनिश्चितता के माप के रूप में किया जा सकता है। यदि आपको एक सिद्धांत का परीक्षण करना है, या दूसरे शब्दों में यदि आपको यह निर्णय लेना है की क्या माप सिद्धांतिक भविष्यवाणियों से सहमत है या नहीं तो इस संबंध में जानकारी प्रप्त करने के लिए मानक विचलन का प्रयोग किया जा सकता है। यदि माध्य और मानक विचलन के बीच का अंतर अधिक है तो जिस सिद्धांत का परीक्षण किया जा रहा है उसका परिशोधन करना होगा। जब मानक विचलन कम होता है तो माध्य अधिक विश्वसनीय होता है और जब मानक विचलन अधिक होता है तो माध्य कम विश्वसनीय होता है। छोटा मानक विचलन सजातीयता को दर्शाता है। मानक विचलन आँकड़े के एक सेट में दिए गए सभी अवलोकनों पर आधारित होता है। यह एक मात्र प्रकीर्णन का माप है जो बीजगणितीय विवेचन के योग्य है। इसलिए मानक विचलन का आगे की संख्यिकी विश्लेषण में प्रयोग किया जा सकता है।

4.3.4.1 मानक विचलन के गुण और सीमाएँ

मानक विचलन के प्रमुख गुण इस प्रकार हैः

1) इसका उपयोग व्यापक रूप से किया जाता है क्योंकि इसके गणितीय विशेषताओं के वजह से यह परिवर्तनशीलता का एक बेहतरीन माप है।

2) यह आँकड़े के सभी अवलोकनों पर आधारित है।

3) यह परिवर्तनशीलता के अन्य मापों की तुलना में जनसँख्या प्राचल का सटीक अनुमान प्रदान करता है।

4) प्रतिदर्श में उत्तर–चढाव का मानक विचलन पर न्यूनतम प्रभाव होता है।

5) संयुक्त मानक विचलन की गणना करना संभव है, जो की अन्य मापों में संभव नहीं होता है।

6) मानक विचलन के आधार पर आगे की सांख्यिकी की गणना की जा सकती है, जैसे की सहसम्बन्ध, प्रतिगमन और सार्थकता का परीक्षण।

7) प्रसारण का गुणांक माध्य और मानक विचलन पर आधारित होता है।यह दो या दो से अधिक वितरणों की परिवर्तनशीलता की तुलना करने के लिए सबसे उचित विधि है।

मानक विचलन की सीमाएं इस प्रकार हैः

1) जब मानक विचलन की गणना की जाती है तब चरम मानों को माध्य के निकट वाले मानों से ज्यादा महत्व दिया जाता है। जब मानक विचलन की गणना की जाती है तब हम माध्य से विचलन लेते है (X-M) और इन विचलनों को वर्ग (squared) करते है। इसलिए वर्ग (squared) करने पर बड़े विचलन आनुपातिक रूप से छोटे विचलन से ज्यादा होते हैं। उदाहरण के लिए, विचलन 2 और 10, 1:5 अनुपात में हैं लेकिन जब इनका वर्ग, 4 और 100 हो जाता है, जिसका अनुपात 1:25 है।

2) प्रकीर्णन के अन्य मापों की तुलना में इसकी गणानां करना कठिन है।

4.3.4.2 मानक विचलन का उपयोग

मानक विचलन का उपयोग इस प्रकार हैः

1) मानक विचलन का उपयोग तब किया जाता है जब परिवर्तनशीलता के मापन के लिए एक विश्वसनीय और सटीक माप की जरुरत होती है, लेकिन इसे तब उपयोग करना चाहिए जब वितरण प्रसामान्य है या प्रसामान्य के निकट है।

2) जब आगे की सांख्यिकी जैसे की सहसम्बन्ध, प्रतिगमन और सार्थकता का परीक्षण की गणना करनी होती है तब मानक विचलन का उपयोग तब किया जाता है।

4.3.5 प्रसरण

प्रसारण शब्द का प्रयोग आर. ए. फिशर ने 1913 में मानक विचलन के वर्ग (square), का वर्णन करने के लिए किया था। प्रसारण की अवधारणा उन्नत कार्य जहां कुल भागों को कई भागों (जहाँ प्रत्येक भाग को एक कारक, जो मूल श्रृंख्ला का कारण है, से सम्बंधित किया गया हैं) में विभाजित करना संभव है, मे महत्व पूर्ण है । प्रसारण, एक आँकड़ा बिंदु का सेट जो माध्य मान के आस पास होता है, उनके प्रकीर्णन का माप है। यह माध्य से मानक वर्ग (squared) विचलन की गणितीय अपेक्षा है। प्रसरण (s^2) या माध्य वर्ग (square), प्रत्येक प्राप्तांक के माध्य के वर्ग (squared) विचलन का अंकगणितीय माध्य है। दूसरे शब्दों में यह प्राप्तांक के वर्ग (squared) विचलन क माध्य है। प्रसरण को इस तरह व्यक्त किया जाता हैः $V = SD^2$ ।

प्रसरण और निकट रूप से सम्बंधित मानक विचलन ऐसे माप है जो प्राप्तांक का वितरण में पसार के विषय में बताते हैं। दूसरे शब्दों में वे परिवर्तनशीलता के माप है। प्रसरण की गणना प्रत्येक अंक का माध्ये से औसत वर्ग (squared) विचलन के रूप में की जाती है।

प्रसरण की गणना किसी भी सांख्यिकीय अनुप्रयोग का महत्वपूर्ण भाग है। यह परिवत. र्नशीलता का एक बेहतरीन निरपेक्ष माप है। और प्रसरण विश्लेषण (ANOVA) में प्रतिदर्श माध्य के बीच के अंतर की सार्थकता की गणना करने में इसका प्रयोग किया जा सकता है।

4.3.4.1 प्रसरण के गुण और दोष

प्रसारण के मुख्य गुण इस प्रकार हैः

1) इसे अन्य तरीके से परिभाषित किया जा सकता है और यह सभी अवलोकनों पर आध ाारित होता है।

2) इस पर आधारित आगे की बीजगणितीय विवेचन किये जा सकते है।

3) प्रतिदर्श में उतार–चढाव से यह प्रभावित नहीं होता है।

4) इसकी अनिश्चिता कम है

प्रसरण के मुख्या दोष इस प्रकार हैः

1) इसको समझना और इसकी गणना करना कठिन है।

2) यह चरम मानों को ज्यादा महत्व देता है।

4.3.4.2 प्रसरण का गुणांक

प्रसरण का गुणांक एक सापेक्ष माप है जो मानक विचलन के अनुरूप है। यह प्रकीर्णन का सापेक्ष माप है जिसे कार्ल पीयरसन द्वारा विकसित किया गया है। जब हमे दो अलग श्रृंखला के प्रकीर्णन की तुलना करनी हो, तब मानक विचलन के सापेक्ष माप की गणना करनी होगी। इसे प्रसरण का गुणांक या मानक विचलन का गुणांक भी कहा जाता है। इसे माध्य के प्रतिशत में व्यक्त मानक विचलन के रूप में परिभाषित किया जाता है। प्रसरण का गुणांक माध्य के मानक विचलन के अनुपात का प्रतिनिधित्व करता है, और यह एक आँकड़ा श्रृंखला की दूसरे आँकड़े श्रृंखला से उनके प्रसरण की मात्रा की तुलना करने में उपयोगी सांख्यिकी है, यह तब भी संभव है जब इन आँकड़ा सशृंकला के माध्य एक दूसरे से भिन्न हो।

इस प्रकार यह मानक विचलन और प्रसारण से ज्यादा उपयुक्त है। इसे प्रतिशत के रूप में दिया जाता है और इसका उपयोग दो या दो से आधी आँकड़ा श्रृंख्ला की स्थिरता और परिवर्तनशीलता की तुलना करने में हो सकता है।

प्रसरण का गुणांक की गणना करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता हैः

$$\mathbf{V = 100 \times \sigma / M}$$

जहाँ

V = प्रसरण

(SD) = मानक विचलन

M = माध्य

एक उदाहरण की सहायता से गणना को समझने का प्रयास करते हैः

यदि एक कक्षा में दस छात्रों की अंग्रेजी विषय की परीक्षा में प्राप्त अंकों का का मानक विचलन 10 है और माध्य 79 है तोः

V = 100 X 10/79

=1000 / 79

= 12.65

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 2

1) परास क्या है?

....

....

....

....

....

2) चतुर्थक विचलन के गुणों को सूचीबद्ध करें।

....

....

....

....

....

3) प्रसरण क्या है?

....

....

....

....

....

4.4 सारांश

संक्षेप में, केंद्रीय प्रवृत्ति के माप, आँकड़े का वर्णन करने के लिए पर्याप्त नहीं हैं । इस प्रकार, वितरण को पर्याप्त रूप से वर्णित करने के लिए, हमें परिवर्तनशीलता या प्रकिंर्णन के मापो की आवश्यकता है। परिवर्तनशीलता के माप मात्रात्मक रूप में यह बताते है की एक वितरण में प्राप्तांक किस सीमा तक विकीर्ण है या समूह में है । परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन और मानक विचलन अधिकतर प्रयोग होने वाले परिवर्तनशीलता के माप है। परास की गणना करना सरल है और यह प्रारंभिक कार्य के लिए उपयोगी है। लेकिन यह चरम एकांश पर आधारित है और मध्यवर्ती प्रप्तांको को नहीं विचारता है। इस प्रकार इसका उपयोग वर्णात्मक माप के रूप में नहीं किया जा सकता है। चतुर्थक विचलन के गुणों के अनुसार वह मध्यिका से सम्बंधित है यह प्राप्तांको की संख्या जो बाहरी चतु. र्थक बिंदु के ऊपर और नीचे हैं उन्हें विचारता है लेकिन उनके परिमाण के विषयं में नहीं विचारता है। यह मुक्तांत निरपेक्ष वितरण के लिए उपयोगी है। औसत विचलन प्रत्येक प्राप्तांक की एक वितरण में सटीक स्थिति को ध्यान में रखता है । माध्य विचलन, प्राप्तांकों के प्रसार का यथार्थ माप है, लेकिन यह गणितीय रूप से अपर्याप्त है। औसत विचलन प्रतिदर्श में उतार–चढाव से कम प्रभावित होता है। मानक विचलन परिवर्तनशीलता का का एक स्थिर माप है। मानक विचलन, प्राप्तांको की माध्य से दूरी का औसत इंगित करता है। यह मूल प्राप्तांको के मात्रक में व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार यह वर्णात्मक सांख्यिकी में परिवर्तनशीलता का सबसे अधिक प्रयोग किया गया माप है। प्रसरण (s^2) या माध्य वर्ग (square) प्रत्येक प्राप्तांक के माध्य के वर्ग (squared) विचलन का अंकगणितीय माध्य हैं। दूसरे शब्दों में यह प्राप्तांक के वर्ग (squared) विचलन क माध्य है। प्रसरण का गुणांक एक सापेक्ष माप है जो मानक विचलन के अनुरूप है। यह प्रकीर्णन का सापेक्ष माप है।

4.5 संदर्भ

Garrett, H.E. (1981), *Statistics in Psychology and Education*, (Tenth edition), Bombay, Vakils Feffer and Simons Ltd.

McBride, Dawn M. (2018). *The Process of Statistical Analysis in Psychology.* Sage. USA

Minium, E.W., King, B.M. & Bear. G (2001). *Statistical Reasoning in Psychology and Education* (3rd edition), Singapore, John Wiley & Sons, Inc.

Mohanty, B. & Misra, Santa (2016). *Statistics for Behavioural and Social Sciences.* Sage. New Delhi.

4.6 शब्दावली

औसत विचलन या माध्य विचलनः प्रकीर्णन का एक माप जो प्रत्येक एकांश और माध्य के बीच औसत अंतर (धन और ऋण के चिन्हों को अनदेखा कर) प्रदान करता है।

प्रकीर्णन : एक आँकड़े के सेट में परिवर्तनशीलता या पसार ।

विचलन : असंसाधित प्राप्तांक और माध्य के बीच का अंतर ।

चतुर्थक विचलन : प्रकीर्णनन का माप जो Q_3 और Q_1 के बीच के अंतर को दो से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

परास : उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक के बीच का अंतर ।

मानक विचलन : श्रुंखला में प्रसरण का वर्गमूल।

प्रसरण : प्रसारण, एक आँकड़े बिंदु का सेट जो माध्य मान के आस पास होते है, उनके प्रकीर्णन का माप है। यह माध्य से मानक वर्ग (squared) विचलन की गणितीय अपेक्षा है।

4.7 अपनी प्रगति की जाँच कीजिए के उत्तर

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 1

1) परिवर्तनशीलता के किसी भी एक कार्य को बताएं।

   परिवर्तन'ीलता के माप अन्य सांख्यिकीय तकनीकों के उपयोग की सुविधा प्रदान करते हैं जैसे कि सहसंबंध, प्रतिगमन वि'ले'ाण आदि।

2) प्रकीर्णन के दो व्यापक मापों को सूचीबद्ध करें ।

   निरपेक्ष प्रकीर्णन और सापेक्ष प्रकीर्णन

अपनी प्रगति की जाँच कीजिए 2

1) परास क्या है ?

परास को उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक के बीच के अंतर के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

2) चतुर्थक विचलन के गुणों को सूचीबद्ध करें।

चतुर्थक विचलन के गुण इस प्रकार हैं

1) परास की तुलना में चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का बेहतर माप है क्योंकि इसमें 50% आँकड़े समाहित किये जाते है। परास, वितरण के केवल दो मानों, उच्चतम और निम्नतम, पर आधारित होता है।

2) चतुर्थक विचलन चरम प्राप्तांको से प्रभावित नहीं होता क्यूंकि इसमें आँकड़े के शुरू के 25 प्रतिशत और अंत के 25 प्रतिशत प्राप्तांक समाहित नहीं किये जाते है।

3) चतुर्थक विचलन की गणना एक मुक्तांत निरपेक्ष वर्ग वाले आवृती वितरण के लिए की जा सकती है।

3) प्रसरण क्या है ?

प्रसारण, एक आँकड़ा बिंदु का सेट है जो माध्य मान के आस पास होता है, उनके प्रकीर्णन का माप है। यह माध्य से मानक वर्ग (squared) विचलन की गणितीय अपेक्षा है। प्रसरण (s^2) या माध्य वर्ग (square), प्रत्येक प्राप्तांक के माध्य के वर्ग (squared) विचलन का अंकगणितीय माध्य है।

4.8 इकाई अंत प्रश्न

1) परिवर्तनशीलता की अवधारणा और महत्व की व्याख्या कीजिए ।
2) परास और चतुर्थक विचलन के गुण और दो'ा पर चर्चा कीजिए ।
3) मानक विचलन के गुण और सीमाओं को सूचीबद्ध कीजिए ।
4) औसत विचलन या माध्य विचलन को स्पष्ट कीजिए ।
5) उदाहरण के साथ प्रसरण का गुणांक स्पष्ट कीजिए।

इकाई 5 परिवर्तनशीलता के मापों की गणना *

संरचना

5.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- परास की गणनाय
- समूहकृत और असमूहकृत आँकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन की गणना;
- समूहकृत और असमूहकृत आँकड़ों के लिए औसत विचलन की गणना; और
- समूहकृत और असमूहकृत आँकड़ों के लिए और लघु विधि की सहायता से मानक विचलन की गणना कर सकेंगे।

5.1 प्रस्तावना

पिछली दो इकाइयों में, हमने केंद्रीय प्रवृत्ति के माप और परिवर्तन'ीलता के माप के बारे में चर्चा की । हमने चर्चा की औसत जैसे कि माध्य, माध्यिका, और बहुलक श्रंखला को एकल संख्या में संक्षिप्त करते हैं। केंद्रीय प्रवृत्ति के माप हमे वितरण के परिमाण के

---

* प्रो. उषाकुलश्रेष्ठ, प्रध्यापक, मनोविज्ञान विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सामान्य स्तर के विषय में बताते है, लेकिन इस्से ज्यादा वितरण के विषय में वे कोई जानकारी नहीं प्रदान करते हैं। यह पूरी तरह से जनसँख्या का प्रतिनिधित्व नहीं करते है जब तक हमे यह नहीं पता चलता की प्रत्येक एकांश किस प्रकार से विकीर्ण है। औसत के प्रतिनिधित्व का अनुमान लगाने के लिए हमे श्रुंखला का और वर्णन करना होगा।

उदाहरण के लिए, किसी देश में औसत आय बहुत अधिक हो सकती है, फिर भी लोगों के मध्य इसके वितरण में भारी असमानता हो सकती है। नतीजतन, बहुत लोग गरीबी रेखा से नीचे जीवनयापन कर रहे होंगे।

जब हमे दो समूहों की तुलना करनी होती है, हम देखते हैं की कभी कभी इनके माध्य का मान सामान होता है लेकिन इन समूहों के प्रतिभागियों में काफी भिन्नता होती है। जब एक ही समूह के प्रतिभागियों के मध्य भिन्नता होती है, तो इस भिन्नता को विचरण कह सकते हैं। इसका अर्थ है की माध्य के समान होते हुए भी, हर समूह के प्रतिभागियों में भिन्नता हो सकती है। दो समूहों के मध्य सटीक और अर्थपूर्ण तुलना करने के लिए यह जरुरी है की हम केंद्रीय प्रवृत्ति के साथ परिवर्तनशीलता का उपयोग करें।

पिछली इकाई में हमने परिवर्तनशीलता की अवधारणा, परिवर्तनशीलता के विभिन्न माप उनके गुण, सीमायें व उपयोगिता के विषय में सीखा है। इस इकाई में, हम परास, चतुर्थक विचलन, औसत विचलन और मानक विचलन की गणना सीखेंगे।

5.2 परिवर्तनशीलता के विभिन्न मापों की गणना

जैसा कि पिछली इकाई में बताया गया है कि परिवर्तनशीलता या प्रकीर्णन के मापों की गणना के चार प्रकार हैं।

1) परास (R)

2) चतुर्थक विचलन (QD)

3) औसत विचलन (AD) या माध्य विचलन (MD)

4) मानक विचलन (SD)

परिवर्तनशीलता का प्रत्येक प्रकार हमे, एकल संख्या का प्रयोग कर, परिवर्तनशीलता या प्रकीर्णन की मात्रा या डिग्री के विषय में बतात है। परिवर्तनशीलता के प्रकार हमे यह भी बताते है की प्रत्येक प्राप्तांक का प्रसार वितरण में कैसा है। आगे के अनुभाग में हम उपरा.
ेक्त दिए गए प्रकीर्णन के मापों की गणना पर चर्चा करेंगे।

5.2.1 परास

परास एक समूह के उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक के बीच का अंतर है। परास के लिए सूत्र निम्नानुसार है ।

R = H - L

जहाँ ,

H = वितरण का उच्चतम प्राप्तांक

L = वितरण का निम्नतम प्राप्तांक

आइए हम एक उदाहरण की सहायता से परास की गणना को चरणों की सहायता से समझते हैं

उदाहरण के लिए, यदि 10 छात्र हैं जिन्होंने इतिहास में निम्नानुसार अंक प्राप्त किए हैं:

50, 45, 42, 46, 55, 54, 59, 60, 62, 64

चरण 1: प्राप्तांकों के आरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

42, 45, 46, 50, 54, 55, 59, 60, 62, 6

चरण 2: श्रंखला में उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक की पहचान करें । उपरोक्त आँकड़े में, उच्चतम प्राप्तांक 64 है और निम्नतम प्राप्तांक 42 है।

चरण 3: निम्नलिखित सूत्र की सहायता से परास की गणना करें ।

R=H-L

64–42 = 22

इस प्रकार, प्राप्त परास 22 है।

5.2.2 चतुर्थक विचलन (QD)

अंतर चतुर्थक परास , प्रकीर्णन का एक माप है और यह तीसरे और पहले चतुर्थक ले मध्य के अंतर के बराबर होता है। अंतर चतुर्थक परास के आधे को अर्ध अंतर चतुर्थक परास या चतुर्थक विचलन कहा जाता है ।

चतुर्थक विचलन (QD) की गणना का सूत्र निम्नलिखित है:

$QD = Q_3 - Q_1/2$

जहाँ ,

Q_1 = आँकड़ों का पहला चतुर्थक

Q_3 = आँकड़ों का तीसरा चतुर्थक

चतुर्थक, आँकड़े को घटको में पृथक करने का एक अतिरिक्त तरीका है। प्रत्येक चतुर्थक, जनसँख्या या समूह के एक चौथाई का प्रतिनिधित्व करता है। चतुर्थक विचलन का एक आकर्षक अभिलक्षण यह है की आँकड़े का 50 % ''मध्यिका़QD'' परास में सम्मिलन होता है। चतुर्थक विचलन को प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप भी कहा जाता है। इसके सापेक्ष माप को चतुर्थक विचलन का गुणांक या अर्ध अंतर चतुर्थक परास भी कहा जाता है।

चतुर्थक विचलन का गुणांक = $(Q_3 - Q_1)/(Q_3+Q_1)$

एक आवृत्ति वितरण में, चतुर्थक विचलन 75 वे और 25 वे शतमक के मध्य की मापनी अंतर (scale distance) का आधा होता है। 25 वा शतमक या Q_1, प्राप्तांक मापनी का पहला चतुर्थक है, यह वो बिंदु है जिसके नीच 25% प्राप्तांक आते हैं। 75 वा शतमक या Q_3 , प्राप्तांक मापनी पर तीसरा चतुर्थक है, यह वो बिंदु है जिसके नीचे 75% प्राप्तांक आते हैं। चतुर्थक विचलन को प्राप्त करने के लिए हमे Q_3 और Q_1 की गणना करनी हा. ेगी ।

प्रत्येक परिस्थिति में कुछ समूहीकृत आँकड़े और कुछ असमूहीकृत आँकडें होते हैं । चतु. र्थक विचलन की गणना करने के लिए हमें पहले यह पता लगाना होगा की कौन से आँकडे समूहीकृत है और कौन से असमूहीकृत आँकडे हैं। हम पहले देखेंगे की असमूहीकृत आँकड़े से चतुर्थक विचलन की गणना कैसे की जाती है।

5.2.2.1 असमूहीकृत आँकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन की गणना

हम निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से असमूहीकृत आँकडें के लिए चतुर्थक विचलन की गणना के चरणों को समझत हैं:

मनोविज्ञान विषय की परीक्षा में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक इस प्रकार हैं:

24, 25, 23, 26, 29, 30, 27, 35, 34, 36, 28

चरण 1: दिए गए अंकों को आरोही क्रम व्यवस्थित करें

23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 36

चरण 2: Q_1 की गणना करें

$Q_1 = (N+1)/4$था स्थान

N= 11

$Q_1 = 11+1/4$था स्थान = 3रा स्थान = 25

चरण 3: Q_3 की गणना करें

$Q_3 = 3(N+1)/4$था स्थान

$Q_3 = 3(11+1)/4 =$ 9वा स्थान = 34

चरण 4: निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके QD की गणना करें

$QD = Q_3 – Q_1/2$

प्रस्तुत आँकड़ों में $Q_3 =$ 34 और $Q_{1/2} =$ 25

QD =34–25/2

= 9/ 2

= 4.5

5.2.2.2 समूहीकृत आँकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन (QD) की गणना

समूहीकृत आँकड़ों के लिए फक की गणना निम्नलिखित सूत्र से की जा सकती है।

$QD = Q_3 – Q_1/2$

इसके आगे ,

$Q_1 = l+i[(N/4-\sum fi)]/fq$

$Q_3 = l+i[(3N/4-\sum fi)]/fq$

जहां,

l = अंतराल जिसमे चतुर्थक स्थित है उसकी सटीक निम्न सीमा

i = वर्ग अंतराल की लम्बाई

$\sum fi$ = अंतराल जिसमे चतुर्थक स्थित है, वहां तक की संचायी f

fq = अंतराल जिसमे चतुर्थक स्थित है उसका f

आइये एक उदाहरण की सहायता से समूहीकृत आंकडों के फक की गणना में निहित चरणों को समझते हैं।

वर्ग अंतराल	आवृत्ति (*f*)	संचयी आवृत्ति
195-199	1	50
190-194	2	49
185-189	4	47
180-184	5	43
175-179	8	38
170-174	10	30
165-169	6	20
160-164	4	14
155-159	4	10(1+3+2+4)
150-154	2	6 (1+3+2)
145-149	3	4 (1+3)
140-144	1	1

चरण 1: निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुये Q_1 की गणना की जाती है।

$Q_1 = l+i[(N/4-\sum fi)]/fq$

Q_1 की स्थिति जानने के लिए हम N/4 ज्ञात करते है जो कि इस उदाहरण में

N/4= 50/4 =12.5 है।

l = 159.5 (50/4 = 12.5 वां एकांश, नीचे की ओर से गणना करते हुए), यह अंतराल 160 . 164 में आता है।

fi = 10 संचयी प्राप्तांक उस अंतराल तक जिसमें Q_1 स्थित है।

fq = 4, उस अंतराल की आवृत्ति जिसमें फ$_1$ स्थित है।

i = 5 ;वर्ग अंतराल)

इनको सूत्र में स्थानांतरित करने पर हमें प्राप्त होगा

Q_1=159.5+5{(12.5-10)}/4=162.62

चरण 2: तृतीय चतुर्थकए अर्थात Q_3 की गणना करने के लिये.

$Q_3 = l+i\ [(3N/4-\sum fi)]/fq$

Q_3 की स्थिति जानने के लिए हम 3xN/4 ज्ञात करेंगे, जो कि इस उदाहरण में,

3N/4 = 3×50/4 = 37.5

3/4N = 37.5 (37.5 वी संख्या अंतराल 175.179 में आती है।

l = 174.5 उस अंतराल की निम्नतम संख्या है जिसमें Q_3 स्थित है।

$\sum fi$ = 30, आवृत्ति का संचयी योग जिसमें Q_3 स्थित है

i=5 वर्ग अंतराल

fq=8 उस अंतराल की आवृत्ति जिसमें Q_3 स्थित है।

Q_3=174.5+5(37.5-30)/8 =179.19

चरण 3: सूत्र में स्थानांनतरित करने पर हमें QD ज्ञात होता है ।

QD = Q_3–Q_2 / 2

Q = {(179.19)–-(162.62)}/2 = 8.28

इस प्रकार इन आँकड़ों का QD= 8.28 है।

5.2.3 औसत विचलन (AD)

असमूहीकृत तथा समूहीकृत आँकड़ों के लिये औसत विचलन की गणना की जा सकती है।

5.2.3.1 असमूहीकृत आँकड़ों के लिए औसत विचलन की गणना

असमूहीकृत आँकड़ों औसत विचलन की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है।

AD=∑|x|/N

जहां

∑|x|= माध्य से विचलन का योग

N= अवलोकन की कुल संख्या

आइये असमूहीकृत आँकड़ों के लिए औसत विचलन की गणना में निहित चरणों को समझते हैं।

एक परीक्षा में पांच विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नानुसार है

विद्यार्थी	प्राप्तांक	माध्य से विचलन |x|
1	6	-4
2	8	-2
3	10	0
4	12	2
5	14	4
	योग =50	**योग =12** (चिन्हों को नजरंदाज करे)
	माध्य =50/5=10	

चरण 1: माध्य की गणना का सूत्र M=∑X/N

M=50/5 =10

चरण 2: माध्य से विचलन की गणना करें जैसे की उपरोक्त उदाहरण में तालिका के तीसरे स्तम्भ में दिखया गया है। तालिका से पता चलता है की, विचलन (x) =0,-2,-4, +2, +4

चरण 3: + और – चिन्हों को अनदेखा करते हुए विचलनों के योग की गणना करें । इस प्रकार विचलनों का योग 12 है।

चरण 4: निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए औसत विचलन (AD) की गणना की जाती है।

$AD = \sum|x|/N$

$= 12/5$

$= 2.4.$

प्राप्त औसत विचलन 2.4 है।

5.2.3.2 समूहीकृत आँकड़ों के लिए औसत विचलन की गणना

समूहीकृत आँकड़ों के लिए औसत विचलन की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है।

$\mathbf{AD= \sum|fx|/N}$

जंहा

$\sum|fx|$ = + और – चिन्हों को अनदेखा करते हुये विचलनों का योग करें

N= अवलोकन की कुल संख्या

आइये समूहीकृत आँकड़ों के औसत विचलन की गणना में निहित चरणों को सोदाहरण सहीत समझते हैं।

वर्ग अंतराल	आवृत्ति (*f*)	मध्य मान (X)	*f*X	X = M-X	*f*x
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
110-114	3	112	336	20.33	60.99
			(112×3)	(112-91.67=20.33)	(20.33×3)
105-109	4	107	428	15.33	61.32
100-104	6	102	612	10.33	61.98
95-99	8	97	776	5.33	42.64
90-94	15	92	1380	.33	4.95
85-89	10	87	870	–4.67	–46.67

80-84	7	82	574	–9.67	–67.69
75-79	4	77	308	–14.67	–58.68
70-74	3	72	216	–19.67	–59.01
	योग = 60		**योग = 5500**		**योग = 463.93**
			माध्य = 91.67		

चरण 1: जैसे तालिका में दिखया गया है, वर्ग अंतराल के मध्य बिंदुओं की पहचान करें और इन्हे तालिका के तीसरे स्तम्भ में लिखे।

चरण 2: मध्य बिन्दों और तत्संबंधित आवृत्तियों की गुणा कीजिए और स्तम्भ 4 में लिखे।

चरण 3: प्राप्त fX के लिए माध्य की गणानां सूत्र $M=\sum X/N$ की सहायता से करें।

M = 5500/60

= 91.67

चरण 4: तदुपरांत x की गणना सूत्र x = M–X की सहायता से करे और x एवं f का गुणनफल स्तंभ 6 में लिखें और उनका योग कर लें।

चरण 5: समूहीकृत आँकड़ों के औसत विचलन की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है:

$AD = \sum|fx|/N$

= 463.93/60

= 7.73

प्राप्त औसत विचलन 7.73 है ।

5.2.4 मानक विचलन (SD)

मानक विचलन प्रविर्तनशीलता का एक स्थिर माप है. इसलिए इसका प्रयोग अधिकतर शोध अध्ययन में किया जाता है। मानक विचलन की गणना समूहीकृत और असमूहीकृत आँकड़ों के लिए की जा सकती है।

5.2.4.1 असमूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना

असमूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है।

$SD = \sqrt{\sum x^2/N}$

आइये असमूहीकृत आँकड़ों के मानक विचलन की गणना में निहित चरणों को सोदाहरण सहित समझते हैं।

प्राप्तांक (X)	**माध्य से विचलन (x)**	**विचलन का वर्ग (x^2)**

52	-8	64
50	-10	100
56	-4	16
68	8	64
65	5	25
62	2	4
57	-3	9
70	10	100
योग = 480		**$\sum x^2$= 382**
माध्य = 60		

चरण 1: सभी प्राप्तांकों का योग ($\sum x$) कर उसे प्राप्तांकों की कुल संख्या (N) से विभाजित कर

माध्य की गणना करें । आँकड़ा प्राप्तांकों का माध्य निम्नुसार है ।

$M = \sum X/N = 480/8 = 60.$

चरण 2: विचलन की गणना X – गए से कर उसे स्तंभ 2 में लिखें ।

चरण 3: सभी विचलनों का वर्ग (square) x^2 ज्ञात करें और उसे स्तंभ 3 में लिखें।

चरण 4: वर्ग (squared) विचलन का योग करें एवं $\sum x^2$ का मान प्राप्त करें ।

चरण 5: मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र. की सहायता से करें।

$SD = \sqrt{\sum x^2/N}$

$= \sqrt{382/8}$

$= \sqrt{47.7} = 6.91$

प्राप्त मानक विचलन 6.91 है।

5.2.4.2 दीर्घ विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना

दीर्घ विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र. द्वारा की जाती है।

$SD = \sqrt{\sum fx^2/N}$

जहां

$\sum fx^2$= जब हम प्रत्येक वर्ग अंतराल के आवृत्ति और वर्ग (squared) विचलन की गुणा करते है तो fx^2 प्राप्त होता है और सभी fx^2 का योग $\sum fx^2$ है।

छत्र प्राप्तांको की कुल संख्या

वर्ग अंतराल *(i)*	आवृत्ति *(f)*	मध्यबिंदु	*f*x	माध्य से विचलन (x= X- M)	वर्ग (squared) विचलन	*f*x²
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
127-129	1	128	128	17.6	309.76	309.76
124-126	2	125	250	14.6	213.16	213.16
121-124	2	122	244	11.6	134.56	134.56
118-120	2	119	238	8.6	73.96	73.96
115-117	4	116	464	5.6	31.36	31.36
112-114	4	113	452	2.6	6.76	6.76
109-111	4	110	440	–0.4	0.16	0.16
106-108	2	107	214	–3.4	11.56	11.56
103-106	2	104	208	–6.4	40.96	40.96
100-102	2	101	202	–9.4	88.36	88.36
	योग = 25			**∑fx= 2760**		**∑ f x ² = 1588**

दीर्घ विधि पद्धति द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना में निहित चरणों को सोदाहरण सहित समझते हैं।

चरण 1: वर्ग अंतराल का मध्यबिंदु (X) ज्ञात करके उसे स्तंभ 3 में लिखते हैं।

चरण 2: मध्य अंक (X) तथा आवृत्ति का गुणनफल (*f*X) की गणना करके स्तंभ 4 में लिखते हैं।

चरण 3: fX के सारे प्राप्तांकों का योग करके उन्हें आवृत्ति की कुल योग से विभाजित करके माध्य की गणना करते हैं । अत: $M= \sum fX/ N$, = 2760/ 25= 110.4. । इस प्रकार, प्राप्त माध्य 110.4 है।

चरण 4: x की गणना, X (मध्यबिंदु) में से M को घटा कर की जाती है और स्तंभ 5 में लिख लिया जाता है।

चरण 5: x के मानों का वर्ग (square) ज्ञात करके उसे स्तंभ 6 में लिखा जाता है ।

चरण 6: तदुपरांत f और x^2 का गुणनफल fx^2 ज्ञात करके स्तंभ 7 में लिखा जाता है ।

चरण 7: fx^2 का योग करके $\sum fx^2$ प्राप्त होता है । उदाहरण में यह 1588 है ।

चरण 8: मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र. की सहायता से करें।

$$SD= \sqrt{\sum fx^2/N}$$

$$= \sqrt{1588/ 25}$$

$$= \sqrt{63.52}$$

$$= 7.97$$

प्राप्त मानक विचलन 7.97 है।

5.2.4.3 लघु विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना

लघु विधि द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र. द्वारा की जाती है।

$$SD= i \sqrt{\sum fx'^2/N-(\sum(fx')/N)^2}$$

जहां

पत्र वर्ग अंतराल

$\sum fx'^2$= जब हम प्रत्येक वर्ग अंतराल के आवृत्ति और मध्यबिंदु का माध्य से विचलन (x') की गुणा करते है तो fx' प्राप्त होता है। fx' का वर्ग (square), fx'^2 प्रत्येक वर्ग अंतराल के लिए किया जाता है। और सभी fx'^2 का योग $\sum fx'^2$ है।

आइये संक्षिप्त पद्धति द्वारा समूहीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन (SD) की गणना में निहित चरणों को सोदाहरण सहित समझते हैं।

वर्ग अंतराल	आवृत्ति (*f*)	मध्यबिंदु (X)	मध्य से मध्य बिंदु का विचलन (x′= X-AM/i)	(*f*x′)	*f*x′²
(1)	(2)	(3)	(5)	(6)	(7)
127-129	1	128	4	4	16
124-126	2	125	3	6	36
121-124	2	122	2	4	16
118-120	2	119	1	2	4
115-117	4	116	0	0	0
112-114	4	113	-1	-4	16
109-111	4	110	-2	-8	64
106-108	2	107	-3	-6	36
103-106	2	104	-4	-8	64
100-102	2	101	-5	-10	100
	योग = 25			**$\sum fx' = -20$**	**$\sum fx'^2=352$**

चरण 1: सभी वर्ग अंतराल के मध्यबिंदु की गणना करके उन्हें स्तंभ 3 में लिखें।

चरण 2: एक संख्या को अभिगृहीत माध्य मान लें। इस उदाहरण में अभिगृहीत माध्य है 116।

चरण 3: मध्यबिंदु और अभिगृहीत माध्य के बीच अंतर प्राप्त कर इसे वर्ग अंतराल से विभाजित करें। इस तरह x′, (x′= X- AM/i) प्राप्त होगा। प्राप्त मान को स्तम्भ 5 के नीचे लिखे ।

चरण 4: चरण 3 में प्राप्त x′ और तत्सम्बन्धी आवृत्ति को गुणा करें प्राप्त fx′ को स्तंभ 6 में लिख लें ।

चरण 5: चरण 4 में प्राप्त *f*x′ का वर्ग (square) प्राप्त कर (*f*x′2) और स्तंभ 7 में लिख लें। सभी *f*x′2 का योग करें ताकी ∑*f*x′ प्राप्त हो सके।

चरण 6: मानक विचलन (SD) की गणना निम्नलिखित सूत्र की सहायता से करें।

SD= i √ ∑*f*x′²/N-(∑(*f*x′)/N)²

=3 √352/ 25- (-20/ 25)²

=3 √14.08 - (-0.8)² =3 √ 14.08 - 0.64 = 3 √3.44

=3 x 1.85 = 5.55

प्राप्त मानक विचलन 5. 55 है।

अपनी प्रगति की जांच करें 1

1) परास ज्ञात करनें का सूत्र क्या है ?

....

....

....

....

....

2) असमूहीकृत आँकड़ों के मानक विचलन की गणना के चरणों को सूचीबद्ध करें ।

....

....

....

....

....

5.3 सारांश

इस ईकाइ में हमनें परिवर्तन'ीलता के विभिन्न मापों जैसे की परास , औसत विचलन, चतुर्थक विचलन एवं मानक विचलन की गणना का अध्ययन किया है। प्रकीर्णन के सभी मापों की गणना की चर्चा हमनें उदाहरणों को चरणबद्ध रुप मे हल करके की है।

5.4 संदर्भ

Garrett, H.E. (1981), *Statistics in Psychology and Education*, (Tenth edition), Bombay, Vakils Feffer and Simons Ltd.

McBride, Dawn M. (2018). *The Process of Statistical Analysis in Psychology.* Sage. USA

Minium, E.W., King, B.M. & Bear. G (2001). *Statistical Reasoning in Psychology and Education* (3rd edition), Singapore, John Wiley &Sons, Inc.

Mohanty, B. & Misra, Santa (2016). *Statistics for Behavioural and Social Sciences.* Sage. New Delhi.

5.5 अपनी प्रगति की जांच कीजिए के उत्तर

अपनी प्रगति की जांच कीजिए 1

1) परास ज्ञात करनें का सूत्र क्या है ?

R=H-L

2) असमूहीकृत आँकड़ों के मानक विचलन की गणना के चरणों को सूचीबद्ध करें ।

असमूहीकृत आँकड़ों के मानक विचलन की गणना के चरण इस प्रकार हैं:

चरण 1: सभी प्राप्तांकों का योग ($\sum x$) कर उसे प्राप्तांकों की कुल संख्या (N) से विभाजित कर माध्य की गणना करें ।

चरण 2: विचलन की गणना $X - x$।

चरण 3: सभी विचलनों का वर्ग (square) x^2 ज्ञात करें।

चरण 4: वर्ग (squared) विचलन का योग करें एवं $\sum x^2$ का मान प्राप्त करें ।

चरण 5: मानक विचलन (SD) की गणना सूत्र. की सहायता से करें।

5.6 इकाई अंत के प्रश्न

1) निम्नलिखित असमूहीकृत आँकड़ों के लिए परास, औसत विचलन, एवं मानक विचलन की गणना करें ।

अ) 30, 35, 36, 39, 42, 46, 38, 34, 35

ब) 52, 50, 56, 68, 65, 62, 57, 70

2) निम्नलिखित प्राप्तांकों के लिए चतुर्थक विचलन की गणना करें ।

6, 3, 9, 9, 5, 7, 9, 6, 8, 4, 8, 5, 7, 9, 3, 2, 9, 5, 7

3) निम्नलिखित प्राप्तांकों के लिए औसत विचलन की गणना करें ।

वर्ग अंतराल	आवृत्ति

40-44	3
35-39	4
30-34	6
25-29	12
20-24	7
15-19	5
10-14	1

4) निम्नलिखित प्राप्तांकों के लिए चतुर्थक विचलन और मानक विचलन की गणना करें:

प्राप्तांक	आवृत्ति
70.71	2
68.69	2
66.67	3
64.65	4
62.63	6
60.61	7
58.59	5
56.57	1
54.55	2
52.53	3
50.51	1